

FUNZIONI GENERATRICI GENERALIZZATE,
E LORO APPLICAZIONE
AI METODI GRAFICO-NUMERICI DI VALUTAZIONE
NEL CALCOLO OPERATORIO FUNZIONALE (*)

GIUSEPPE APRILE

SUMMARY. — Quaedam significantur rationes quibus notio functionis $f(\Delta)$ ad generalia extendi potest, cum scilicet terminatur ipse operator ex eiusdem applicatione cuilibet ex functionibus $j_n(t) = \Delta^n F u(t)$ GIORGI, vel ex functionibus $e^{-\lambda t} \cdot 1(t)$. Facile exhibetur exemplum quo $n = -2$, quo utilissime uti possumus in rationibus graphico-numericis ad perpendendas symbolicas expressiones.

1. — I metodi grafici o grafico-numericici di valutazione delle equazioni simboliche del calcolo operatorio funzionale, del tipo (1):

$$W(t) = f(\Delta) V(t)$$

possono, come è noto, sostituire utilmente i procedimenti analitici, quando la funzione operanda $V(t)$ sia di espressione difficile da trattare, oppure quando essa, addirittura, non sia esprimibile praticamente in formule (curva grafica).

Detti metodi si fondano per lo più sulla scomponibilità delle funzioni operande in funzioni (elementi) di andamento « impulsivo », o di andamento « a gradino », ed inoltre sul principio di linearità che per-

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Giovanni Giorgi, nella Tornata del 6 giugno 1942.

(1) Notazioni del GIORGI; vedi: *Sul calcolo delle soluzioni funzionali originate dai problemi di elettrodinamica*. Atti dell'Associazione Elettrotecnica Italiana, vol. IX (1905), pag. 651-699, ristampato nel « Bollettino Tecnico dell'Istituto Militare Superiore delle Trasmissioni », anno 1940, n. 3 e 4, pag. 91-139.

mette di ottenere il risultato complessivo sommando i risultati parziali relativi agli elementi singoli di scomposizione⁽¹⁾. Il risultato, od effetto, di un elemento impulsivo ha la stessa forma (a meno di un semplice moltiplicatore numerico) della « funzione generatrice » $G(t)$ dell'operatore $f(\Delta)$, mentre quello di un elemento di tipo a gradino ha la forma della « funzione generatrice integrale » $H(t)$ dell'operatore medesimo.

2. - Un operatore funzionale $f(\Delta)$ è interamente caratterizzato dalla relativa $G(t)$ che ne esprime l'applicazione alla funzione impulsiva unitaria $Fu(t)$, oppure dalla $H(t)$ che ne esprime l'applicazione al « gradino unitario » $1(t)$. Questo concetto può estendersi, introducendo la *funzione generatrice generalizzata di ordine n* , $A_n(t)$, data dalla relazione:

$$A_n(t) = f(\Delta) j_n(t)$$

ove è, secondo il GIORGI:

$$j_n(t) = \Delta^n Fu(t)$$

La $G(t)$ e la $H(t)$ rientrano in tale definizione come casi particolari:

$$G(t) = f(\Delta) Fu(t) = f(\Delta) \Delta^0 Fu(t) = A_0(t)$$

$$H(t) = f(\Delta) 1(t) = f(\Delta) \Delta^{-1} Fu(t) = A_{-1}(t)$$

3. - Particolare interesse presenta la funzione generatrice di ordine $n = -2$:

$$A_{-2}(t) = f(\Delta) \Delta^{-2} Fu(t) = f(\Delta) \cdot t \cdot 1(t)$$

risultato dell'applicazione del generico operatore $f(\Delta)$ alla funzione

$$j_{-2}(t) = t \cdot 1(t)$$

⁽¹⁾ Vedi: ANGELINI, *Calcolo operatorio e studio dei circuiti elettrici in regime transitorio*, Monografie dell'Elettrotecnica, Milano, 1935, pag. 46.

Il suo impiego si basa sulla scomposizione della funzione operanda $V(t)$ in elementi aventi la forma della $j_{-2}(t)$, come indicato nella figura 1.

L'uso di questa scomposizione presenta in pratica i vantaggi seguenti:

1) È facile ottenere con pochi elementi un tracciato approssimato alla curva $V(t)$, più di quanto non consenta la scomposizione in elementi di tipo impulsivo o in elementi a gradino.

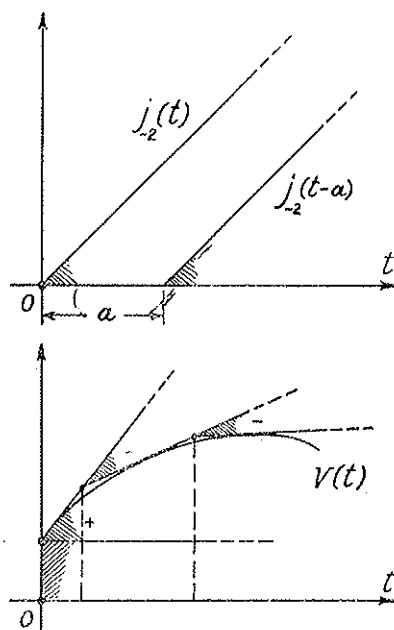


FIG. 1.

Funzione $j_{-2}(t)$, e scomposizione di una funzione $V(t)$ in elementi del tipo $j_{-2}(t)$.

2) La funzione generatrice generalizzata di ordine $n = -2$ non comporta termini impulsivi per gli operatori le cui $G(t)$ o $H(t)$ presentano termini impulsivi del tipo $Fu(t)$.

Il metodo da seguire per l'applicazione dei concetti suesposti è il seguente. Conseguita la scomposizione della $V(t)$ in elementi di tipo $j_{-2}(t)$, e tracciata la generatrice generalizzata $A_{-2}(t)$ dell'operatore $f(\Delta)$, si sommano, graficamente o numericamente, le ordinate di questa, moltiplicate per i fattori numerici (positivi o negativi) che esprimono le

intensità degli elementi singoli di scomposizione, tenendo beninteso presente che ognuno di questi ha una differente ascissa a di localizzazione (fig. 1). Oppure si tracciano le curve esprimenti i risultati parziali relativi ai singoli elementi di scomposizione e si sommano le ordinate corrispondenti.

4. - Altre generalizzazioni sono possibili. Così può caratterizzarsi un generico operatore $f(\Delta)$ mediante il risultato $B_\lambda(t)$ della sua applicazione alla particolare funzione seguente (λ reale > 0):

$$\varepsilon_\lambda(t) = 1(t) \cdot e^{-\lambda t}$$

ponendo cioè:

$$B_\lambda(t) = f(\Delta) \cdot \varepsilon_\lambda(t) = f(\Delta) \cdot 1(t) e^{-\lambda t}$$

L'andamento della $\varepsilon_\lambda(t)$ è praticamente quello dell'onda di voltaggio (onda esponenziale smorzata, a fronte ripida) prodotta da taluni generatori ad impulso, adoperati in prove ad alta tensione sopra sistemi elettrici⁽¹⁾.

Al fine di caratterizzare l'operatore $f(\Delta)$ esprime il comportamento di un sistema elettrico, può convenire qualche volta di ricavare la $B_\lambda(t)$ sperimentalmente (per esempio mediante l'oscillografo), impiegandola in procedimenti grafici per trovare l'effetto di una operanda $V(t)$ qualunque. A tal fine è necessario scomporre la $V(t)$ in elementi aventi la forma della $\varepsilon_\lambda(t)$, ciò che si ottiene come mostrato in figura 2.

È degna di nota la relazione intercorrente fra la funzione $B_\lambda(t)$ e la generatrice $G(t)$:

$$B_\lambda(t) = \frac{1}{\Delta + \lambda} G(t)$$

e quella relativa al caso limite $\lambda = 0$:

$$B_0(t) = \frac{1}{\Delta} G(t) = H(t)$$

⁽¹⁾ Vedi ad esempio: «Rassegna Tecnica del Tecnomasio Italiano Brown Boveri», maggio-giugno 1941, pag. 38-39.

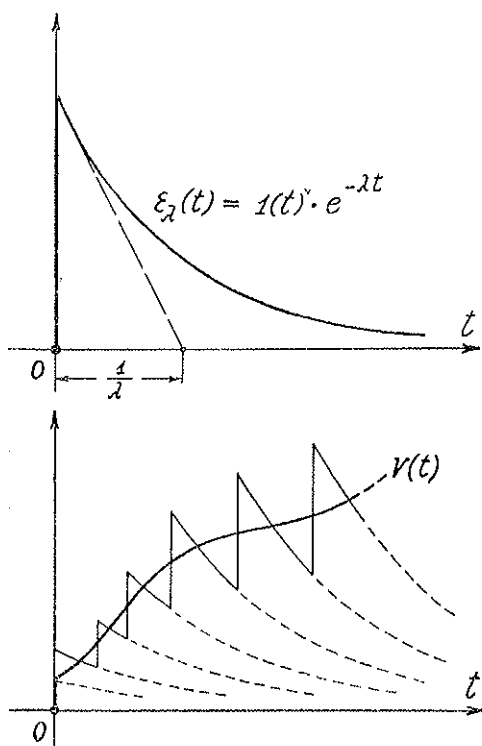


FIG. 2.

Funzione $\epsilon_\lambda(t)$, e scomposizione di una funzione $V(t)$ in elementi di tipo $\epsilon_\lambda(t)$.

5. — Mostriamo, come chiarimento per l'uso delle generalizzazioni sopra indicate, un esempio pratico, scegliendo di proposito un caso assai semplice, facilmente verificabile per altre vie.

Sia un circuito elettrico costituito da una resistenza $R = 100$ ohm, in serie con una induttanza $L = 0,02$ henry, ed alimentato, a partire dall'istante $t = 0$, da una f. e. m. :

$$V(t) = 100 \cdot \text{sen}(2\pi \cdot 1000 t) \text{ volt}$$

Si voglia ricavare l'andamento della corrente $I(t)$ nel fenomeno d'inserzione di cui trattasi, per esempio nel primo semiperiodo della $V(t)$, applicando un procedimento basato sull'uso della funzione generatrice generalizzata di ordine $n = -2$.

L'operatore che caratterizza il circuito (*conduttanza funzionale*) è il seguente:

$$f(\Delta) = \frac{1}{R + L\Delta} = \frac{1}{L} \frac{1}{\Delta + \rho}$$

essendo

$$\rho = \frac{R}{L} = 5000 \quad 1/\text{sec}$$

L'equazione simbolica che governa il fenomeno è pertanto:

$$I(t) = \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{\Delta + \rho} V(t)$$

espressione che si tratta appunto di valutare. La funzione generatrice generalizzata, di ordine $n = -2$, dell'operatore anzidetto vale:

$$\begin{aligned} A_{-2}(t) &= f(\Delta)j_{-2}(t) = \frac{t}{L\rho} - \frac{1}{L\rho^2}(1 - e^{-\rho t}) = \\ &= \frac{1}{0,02} \left[\frac{t}{5000} - \frac{1}{25 \times 10^6} (1 - e^{-5000t}) \right] \text{ amp} \end{aligned}$$

cioè ha l'andamento (fig. 3, curva $A_{-2}(t)$) della corrente che si otterrebbe applicando al circuito una f. e. m. di legge temporale

$$j_{-2}(t) = 1(t) \cdot t \text{ volt}$$

vale a dire crescente, con legge lineare, di un volt al secondo, a partire dall'istante $t = 0$.

Secondo il metodo in questione, si sostituisce alla sinusoidale della $V(t)$ una opportuna spezzata come nella figura 3 anzidetta, il che corrisponde ad una scomposizione in elementi 1), 2), 3), 4), 5), di tipo $j_{-2}(t)$.

Gli effetti y_1, y_2, \dots, y_5 di tali elementi hanno la forma della generatrice generalizzata $A_{-2}(t)$, a meno di opportuni fattori numerici

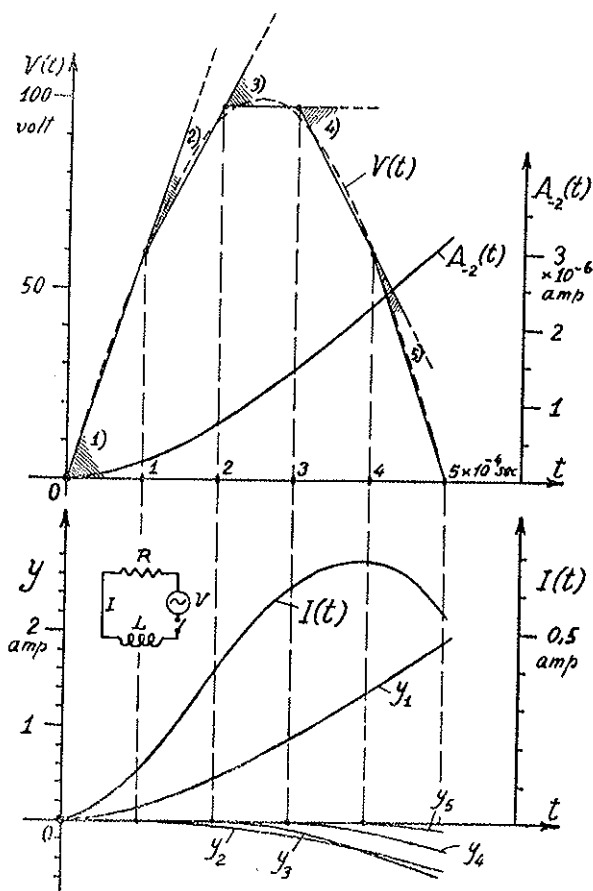


FIG. 8.

Esempio di applicazione della generatrice generalizzata $A_{-2}(t)$ al calcolo grafico-numerico di un transitorio in un circuito elettrico:

- $V(t)$ tensione impressa;
 1), 2), ... 5) elementi di scomposizione, di tipo $j_{-2}(t)$;
 $A_{-2}(t)$ funzione generatrice di ordine $n = -2$ dell'operatore $f(\Delta)$ esprimente la conduttanza funzionale del circuito;
 y_1, y_2, \dots, y_5 risultati parziali dovuti ai singoli elementi di scomposizione;
 $I(t)$ corrente del transitorio (risultato complessivo).

che dipendono dalla «ripidità» degli elementi singoli di scomposizione. La curva esprimente l'andamento cercato dalla corrente $I(t)$ si ricava sommando le ordinate corrispondenti delle curve y .

Nel caso trattato, al risultato poteva naturalmente arriversi più rapidamente con altri procedimenti. Ove invece, però, la $V(t)$ sia data graficamente, oppure sia difficilmente esprimibile in formule, i metodi grafico-numeri si rendono particolarmente preferibili: fra essi quello sopraccennato offre il vantaggio, come si è detto, di poter adoperare in pratica, con buona approssimazione, una scomposizione di $V(t)$ in elementi poco numerosi.