

## IL TEOREMA DI BÉZOUT-SEVERI ED I SISTEMI ALGEBRICI $\infty^d$ DI $S_k$ DELL' $S_r$ (\*)

GIORGIO APRILE (\*)

SUMMARY. — Auctor, attentis Severi notionibus eiusque doctrina, determinat minimam basim pro universis algebraicis systematibus certae dimensionis, quae spatiis linearibus  $S_k$  in quodam  $S_r$  constant.

È ormai ben noto in che cosa consista, secondo SEVERI, il problema della base sopra una varietà algebrica  $M_r$ . Tenuto presente il concetto di equivalenza algebrica (nel campo virtuale) fra varietà (pure) di dimensione  $d (= 1, 2, \dots, R-1)$  tracciate su  $M_r$ , si tratta di trovare su  $M_r$  certe varietà a  $d$  dimensioni  $V^{(1)}, \dots, V^{(e)}$ , formanti base: tali cioè che, presa un'altra qualunque varietà a  $d$  dimensioni  $V$ , esistan convenienti interi  $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_e$  in guisa che:

$$\lambda V + \lambda_1 V^{(1)} + \dots + \lambda_e V^{(e)} \equiv 0,$$

ove  $\equiv$  denota la relazione d'equivalenza algebrica.

Si dice che la base è *minima*, quando nella precedente è  $\lambda=1$ .

In un lavoro recente (2) SEVERI ha ottenuto la soluzione esplicita del problema detto, sopra la grassmanniana  $M_r$  [ $R = (r-k)(k+1)$ ], che rappresenta gli  $S_k$  dello  $S_r$ .

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Francesco Severi nella Tornata del 6 giugno 1942.

(1) L'argomento di questo lavoro è stato indicato da SEVERI nel Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica. Cfr. *Problemi, risultati e discussioni* « Rend. di Matematica della R. Università di Roma e del R. Ist. Naz. di Alta Matematica » (1940) fasc. 2-3, pag. 249, n. 32. Vedi inoltre SEVERI, *I fondamenti della geometria numerativa* « Annali di Matematica » (4), 19, 1940-XVIII, n. 35, pag. 197.

(2) Cfr. SEVERI, Memoria ora citata, nn. 32-35.

Egli deduce la soluzione da quello che può chiamarsi il teorema di BÉZOUT-SEVERI sulla  $M_R$ , vale a dire il teorema che assegna il numero virtuale delle intersezioni di due varietà di dimensioni complementari tracciate su  $M_R$ . Spiegheremo brevemente di che cosa si tratta.

Ricordiamo che col simbolo  $[a_0, a_1, \dots, a_k]$ , ove  $0 \leq a_0 < a_1 < \dots < a_k \leq r$ , s'indica una *forma fondamentale* di SCHUBERT, cioè la totalità  $\infty^d$  degli  $S_k$  dello  $S_r$  che giacciono in un dato  $S_{a_k}$ , hanno con un dato  $S_{a_{k-1}}$  di  $S_{a_k}$  un  $S_{k-1}$  comune, con un dato  $S_{a_{k-2}}$  di  $S_{a_{k-1}}$  un  $S_{k-2}$  comune, ..., con un dato  $S_{a_0}$  di  $S_{a_1}$  un punto comune.

Entro  $M_R$  una forma  $[a_0, a_1, \dots, a_k]$  è rappresentata da una varietà di dimensione

$$d = \sum_{i=0}^k a_i - \frac{1}{2} k(k+1).$$

Sia  $\Gamma_d$  un sistema algebrico  $\infty^d$  di  $S_k$  dello  $S_r$  ( $d=1, \dots, R-1$ ). Indichiamo con  $c_\delta$  ( $\delta=R-d$ ) la condizione algebrica di dimensione  $\delta$  imposta ad un  $S_k$  perchè questo appartenga a  $\Gamma$ , e con  $(a_0, \dots, a_k)$  la condizione di dimensione  $\delta$  imposta ad un  $S_k$  perchè appartenga alla forma  $[a_0, \dots, a_k]$  di dimensione  $d$ .

Ebbene, il teorema di BÉZOUT-SEVERI dà immediatamente, come dimostra SEVERI, la soluzione del problema delle caratteristiche concernenti le condizioni algebriche relative agli  $S_k$  di  $S_r$  <sup>(1)</sup> cioè l'egualianza tra condizioni:

$$[1] \quad c_\delta = \sum v_{a_0 \dots a_k} (a_0, \dots, a_k)$$

dove il sommatorio è esteso in corrispondenza a tutte le condizioni  $(a_0, \dots, a_k)$  di dimensioni  $\delta$ , ed i coefficienti  $v_{a_0 \dots a_k}$  sono *caratteri* del

(<sup>1</sup>) La prima soluzione del problema, ottenuta in maniera non del tutto rigorosa, è dovuta, come si sa, a SCHUBERT, *Lösung des Charakteristiken-Problems*, ecc. « Mittheilungen der Math. Gesel. in Hamburg », t. I, 1886, pag. 134. SEVERI diede, per una via rigorosa e nuova, la soluzione del problema stesso nella Nota: *Le coincidenze d'una serie algebrica  $\infty^{(k+1)(r-k)}$  di coppie di spazi a  $k$  dimensioni immersi nello spazio ad  $r$  dimensioni* « Rend. della R. Acc. dei Lincei », (5), 9, 1900, pp. 321-326. Il procedimento cui si allude nel testo è quello che trovai in SEVERI, Memoria cit. in nota 1 a pag. 171, pagg. 191-192.

sistema  $\Gamma$ , che esprimono il numero (finito) degli  $S_k$  di  $\Gamma$  appartenenti ad una generica forma  $[r - a_k, \dots, r - a_0]$ , di dimensione  $R - d$ , *duale* della forma  $[a_0, \dots, a_k]$  <sup>(1)</sup>.

D'altronde la [1] equivale alla relazione d'equivalenza aritmetica

$$[2] \quad \Gamma \equiv \sum v_{a_0} \dots a_k [a_0, \dots, a_k],$$

da cui discende, con SEVERI, l'equivalenza algebrica

$$[3] \quad \varepsilon \Gamma \equiv \sum \varepsilon v_{a_0} \dots a_k [a_0 \dots a_k]$$

con  $\varepsilon$  intero conveniente.

Nulla può dirsi a priori circa il valore di  $\varepsilon$ , sulla base del ragionamento ricordato, di carattere eminentemente numerativo: onde dalla [3] risulta soltanto che le forme di SCHUBERT, di dimensione  $d$ , costituiscono una base dei sistemi algebrici di  $S_k$  di dimensione  $d$ , ma non necessariamente una *base minima* (di fronte alle equivalenze algebriche).

Per dimostrare che, invece, così è di fatto, SEVERI stesso ha accennato <sup>(2)</sup> (nel caso  $r = 3$ ), ad un altro procedimento col quale può giungersi per via più elementare e diretta alla determinazione della base (e, automaticamente, della base minima) sopra la varietà grassmanniana. Si tratta in sostanza di costruire in  $S_r$  convenienti omo-

<sup>(1)</sup> I caratteri  $v_{a_0} \dots a_k$  del sistema  $\Gamma$  si riducono, per il caso dei sistemi di rette dell' $S_r$ , a quelli che il MARLETTA chiama *ordine* e *classi*. Cfr. *Preliminari per la teoria degli  $(r-1)$ -complessi di rette dell' $S_r$*  « Circolo Matematico, Catania », 1928-VI. E difatti per  $k=1$  il carattere  $v_{a_0 a_1}$  (dove  $a_0 + a_1 = d + 1 = 2r - \delta - 1$ ) è dato dal numero finito delle rette del sistema appartenenti alla generica forma  $[r - a_1, r - a_0]$ , di dimensione  $\delta$ ; per cui:

a) per  $a_1 = r$ , e quindi  $a_0 = d - r + 1$ , il carattere  $v_{a_0 a_1}$  diviene il numero finito delle rette del sistema appartenenti alla generica forma  $[0, 2r - d - 1]$ , numero che coincide con quello che il MARLETTA chiama *ordine* del sistema; e cioè con l'ordine delle varietà (di punti)  $V_{d-r+2}$  generata dalle  $\infty^{d-r+1}$  rette di  $\Gamma$  passanti per un generico punto dell'ambiente  $S_r$ .

b) per  $a_1 = r - i$  (e quindi  $a_0 = d - r + i + 1$ ;  $i \geq 1$ ) il carattere  $v_{a_0 a_1}$  vien dato dal numero finito delle rette del sistema appartenenti alla generica forma  $[i, 2r - d - i - 1]$ , numero che coincide con quello che il MARLETTA chiama *esima classe* di  $\Gamma$ ; e cioè con l'ordine della varietà  $V_{2r-d-2i-1}$  generata dalle  $\infty^{2r-d-2i-2}$  rette di  $\Gamma$  esistenti in un generico spazio  $S_{2r-d-i-1}$ .

<sup>(2)</sup> Cfr. la Memoria citata in nota 1 a pag. 171, pag. 197.

logie variabili, mediante le quali sia possibile di ridurre, con una variazione continua, ogni sistema algebrico di  $S_k$  ad una combinazione lineare di forme di SCHUBERT.

In questo lavoro io sviluppo appunto tal procedimento per  $r$  qualunque, ritrovando così il risultato di SEVERI e la sua maggiore precisazione, espressa dalla [3] stessa, ove si ponga  $\varepsilon = 1$ .

1. OSSERVAZIONE PRELIMINARE. — Avvertiamo che, allo scopo di stabilire la [3] con  $\varepsilon = 1$ , è sufficiente di dimostrare che ogni sistema  $\Gamma$  può ridursi per continuità — come si è accennato — ad una somma di forme di SCHUBERT  $[a_0, \dots, a_k]$  di dimensione  $d$ , ciascuna contata un certo numero  $\lambda_{a_0 \dots a_k}$  di volte (eventualmente anche zero volte), e quindi che risulta:

$$[4] \quad \Gamma \equiv \sum \lambda_{a_0 \dots a_k} [a_0, \dots, a_k]$$

Infatti, una volta stabilita la [4], si vede subito che i numeri  $\lambda_{a_0 \dots a_k}$  risultano automaticamente coincidenti con i caratteri  $v_{a_0 \dots a_k}$  di  $\Gamma$ , dei quali dianzi si è ricordato il significato.

Basta all'uopo intersecare i due membri della [4] con una forma di SCHUBERT  $[r-b_k, \dots, r-b_0]$  di dimensione  $R-d$ , in posizione generica, ottenendosi:

$$[\Gamma \cdot [r-b_k, \dots, r-b_0]] = \sum \lambda_{a_0 \dots a_k} [[a_0, \dots, a_k] [r-b_k, \dots, r-b_0]]$$

Tenuto conto che l'intersezione  $[[a_0, \dots, a_k] [r-b_k, \dots, r-b_0]]$  vale 1 per  $a_0=b_0, \dots, a_k=b_k$  (cioè quando  $[a_0, \dots, a_k]$ ,  $[r-b_k, \dots, r-b_0]$  sono forme coniugate), e zero in ogni altro caso (\*), si trae:

$$[\Gamma \cdot [r-b_k, \dots, r-b_0]] = \lambda_{b_0 \dots b_k}$$

cioè:

$$v_{b_0 \dots b_k} = \lambda_{b_0 \dots b_k}.$$

(\*) Cfr. la Memoria citata in nota 1 a pag. 171, pag. 194.

Pertanto nel seguito tralasceremo di precisare di volta in volta la molteplicità con la quale deve contarsi ciascuna forma di SCHUBERT, nel gruppo delle forme a cui ridurremo per variazione continua il dato sistema  $\Gamma$ , poichè sappiamo ormai che in ogni caso questa molteplicità dovrà essere data, in corrispondenza alla forma  $[a_0, \dots, a_k]$  dal carattere  $v_{a_0 \dots a_k}$  del sistema  $\Gamma$  considerato.

2. GENERALITÀ SULLA VARIAZIONE CONTINUA DEI SISTEMI  $\Gamma$ , MEDIANTE SISTEMI CONTINUI D'OMOGRAFIE. — Fissati un punto  $O_1$  ed un iperpiano  $\Pi_1$  di  $S_r$  in posizione generica fra loro e rispetto a  $\Gamma_a$ , si consideri l'omologia di centro  $O_1$  ed iperpiano  $\Pi_1$  individuata dal birapporto  $(O_1 P A A') = \sigma$ , essendo  $A, A'$  punti omologhi e  $P$  il punto in cui la retta  $O_1 A A'$  incontra  $\Pi_1$ .

Se si fa tendere  $\sigma$  a zero, l'omologia varia tendendo a degenerare e a ridursi ad una proiezione da  $O_1$  su  $\Pi_1$ .

Basta difatti osservare che, se  $A, A'$  sono due punti corrispondenti nell'omologia variabile, ed  $A$  varia con  $\sigma$  tendendo ad una posizione limite  $\bar{A}$ , diversa da  $O_1$  per  $\sigma \rightarrow 0$ ,  $A'$  tende al punto  $\bar{A}'$  coincidente con l'intersezione della retta  $O_1 \bar{A}$  con  $\Pi_1$ .

Inoltre, se  $A'$  varia con  $\sigma$  tendendo ad una posizione limite  $\bar{A}'$  fuori di  $\Pi_1$ ,  $A$  tende ad  $O_1$ .

Trasformiamo il sistema  $\Gamma$  con le omologie del sistema continuo considerato; si tratta di determinare a cosa tende il sistema trasformato quando  $\sigma \rightarrow 0$ .

a) Consideriamo anzitutto il caso di sistemi  $\Gamma_a$  di  $S_k$  con  $d \geq r - k$ ; e si indichi con  $\Gamma^*$  il sistema  $\infty^{d-(r-k)}$  degli  $S_{k-1}$  traccia, sull'iperpiano  $\Pi_1$ , degli  $S_k$  di  $\Gamma$  uscenti da  $O_1$ .

Dico che un  $S_k$  generico appoggiato in un  $S_{k-1}$  qualunque di  $\Gamma^*$  è posizione limite di qualche  $S_k$  del sistema trasformato per  $\sigma \rightarrow 0$ .

Infatti, sia  $\bar{A}' S_{k-1}$  un tal  $S_{k-1}$ , con  $\bar{A}'$  fuori di  $\Pi_1$ . Il punto  $A'$ , variabile con  $\sigma$ , tenda ad  $\bar{A}'$  per  $\sigma \rightarrow 0$ . Gli  $S_k$  del sistema trasformato uscenti da  $A'$  sono i corrispondenti degli  $S_k$  di  $\Gamma$  uscenti dal punto  $A$ , omologo di  $A'$  nella omologia inversa; sicchè se  $A S_{k-1}^{(1)}$  è un  $S_k$  di  $\Gamma$  ed  $S_{k-1}^{(1)}$  ne è l'intersezione con  $\Pi_1$ , sarà  $A' S_{k-1}^{(1)}$  il suo trasformato, essendo  $\Pi_1$  luogo di punti uniti per l'omologia che si considera.

Ne segue che per  $\sigma \rightarrow 0$ ,  $A' \rightarrow \bar{A}'$ , gli  $S_k$  di  $\Gamma$  per  $A$  tendono agli  $S_k$  di  $\Gamma$  uscenti da  $O_1$ , e gli  $S_k$  corrispondenti nella data omologia tendono agli  $S_k$  passanti per gli  $S_{k-1}$  di  $\Gamma^*$ , cioè gli  $S_k$  *limiti* che così si ottengono generano il sistema, che indicheremo con  $\Gamma'$ , di tutti e soli gli  $S_k$  dell' $S_r$  passanti per gli  $S_{k-1}$  anzidetti.

b) D'altra parte gli ulteriori  $S_k$  limiti, dovuti al sistema continuo di omologie considerate, risultano tutti e soli quelli provenienti da  $S_k = A S_{k-1}^{(1)}$  (essendo  $S_{k-1}^{(1)}$  di  $\Pi_1$ ) di  $\Gamma$ , con  $A$  funzione di  $\sigma$  e per  $\sigma \rightarrow 0$ ,  $A \rightarrow \bar{A} \neq O_1$ .

Ma si è sopra osservato che in tal caso  $A'$  tende al punto  $\bar{A}'$  coincidente con l'intersezione  $\bar{P}$  della retta  $O_1 \bar{A}$  con  $\Pi_1$ ; per cui gli ulteriori  $S_k$  limiti sono tutti e soli gli  $S_k$  proiezioni, su  $\Pi_1$  dal punto  $O_1$ , di quelli del dato sistema  $\Gamma$ .

c) Nell'ipotesi di  $d < r - k$  vengono, ovviamente, a mancare gli  $S_k$  di  $\Gamma$  uscenti da un generico punto dell' $S_r$  ambiente, onde nel sistema trasformato (a mezzo della variazione continua dianzi applicata) verranno a mancare gli  $S_k$  limiti ottenuti in a).

Esistono invece gli  $S_k$  limiti considerati in b), e soltanto questi, cioè il dato sistema  $\Gamma_d$  viene, in tal caso, trasformato nel *solo* sistema di questi ultimi  $S_k$  limiti; sistema che indicheremo con  $\Gamma_d^{[1]}$  e che coincide, come si è sopra accennato, con la proiezione del dato  $\Gamma$  su  $\Pi_1$  da  $O_1$ .

Se è  $d < r - k - 1$ , si applichi al sistema  $\Gamma_d^{[1]}$ , dianzi ottenuto, la solita variazione continua (con procedimento analogo a quello tenuto per  $\Gamma_d$ ); si ottiene in tal modo un nuovo sistema  $\Gamma_d^{[2]}$ , proiezione di  $\Gamma_d^{[1]}$  su un  $S_{r-2}$ . Così procedendo si possono ottenere le successive proiezioni  $\Gamma_d^{[3]}, \dots, \Gamma_d^{[s]}$ , rispettivamente su  $S_{r-3}, \dots, S_{r-s}$  dell' $S_r$  ambiente. Ed è chiaro che si può sempre pervenire, in tal modo, ad un sistema  $\Gamma_d^{[s]}$ , appartenente ad uno spazio di dimensione  $r' = r - s$ , per il quale vale la relazione  $d = r' - k = r - k - s$ .

d) Si osservi infine che gli  $S_{k-1}$  di  $\Gamma^*$  sono  $\infty^{d-(r-k)}$ , e quindi un generico  $S_k$  dell'iperpiano  $\Pi_1$  ne contiene  $\infty^{d-(r-k)}$ .

Ne segue che, per  $d \geq r - k$ , anche gli  $S_k$  limiti, considerati in b) appartengono al sistema  $\Gamma'$  degli  $S_k$  passanti per gli  $S_{k-1}$  di  $\Gamma^*$ ; per cui in tal caso il sistema  $\Gamma$  viene trasformato nel solo sistema  $\Gamma'$ , cioè nel sistema di tutti e soli gli  $S_k$  dell' $S_r$  passanti per gli  $S_{k-1}$  di  $\Gamma^*$ .

### 3. CONSIDERAZIONI PRELIMINARI SUL PROBLEMA DELLA BASE PER I SISTEMI $\Gamma$ .

a) Accenneremo anzitutto al caso di  $k=1$ , cioè considereremo i sistemi  $\Gamma_d$  di rette dell' $S_r$ , di dimensione  $d$ .

Il sistema  $\Gamma^*$ , sopra considerato, è dato in questo caso da una varietà  $V_{d-r+1}$  di punti (traccia su  $\Pi_1$  dell'ipercono delle rette di  $\Gamma$  uscenti da  $O_1$ ), varietà che può ridursi con continuità ad uno spazio lineare  $S_{d-r+1}$ , contato più volte <sup>(1)</sup> (e precisamente tante volte quanto è l'ordine della anzidetta  $V_{d-r+1}$ ). Ne risulta quindi che il sistema  $\Gamma'$  può ridursi alla forma fondamentale  $[d-r+1, r]$ , contata più volte.

Se  $d=R-1=2r-3$ , il sistema  $\Gamma'$  è il solo che si ottiene da  $\Gamma$  per la deformazione anzidetta (n. 2,  $d$ ), e quindi si conclude che: la base minima del sistema  $\Gamma_d$  è data dalla sola forma  $[r-2, r]$ .

Per  $d < R-1$  le ulteriori rette limiti costituiscono come si è detto (n. 2,  $b$ ) un nuovo sistema, che indicheremo con  $\Gamma^{[1]}$ , luogo delle  $\infty^d$  rette proiezioni delle rette di  $\Gamma$  da  $O_1$  su  $\Pi_1$ .

Applicando a  $\Gamma^{[1]}$  lo stesso procedimento dianzi tenuto per trasformare  $\Gamma$ , si otterrà in modo analogo una forma fondamentale  $[d-r+2, r-1]$  da contarsi più volte ed un nuovo sistema  $\Gamma^{[2]} \infty^d$  di rette dell' $S_{r-2}$ . Così continuando si ottengono nuove forme fondamentali  $[d-r+i+1, r-i]$  e nuovi sistemi  $\Gamma^{[i+1]}$  dell' $S_{r-i+1}$ .

Si conclude quindi che, per  $0 \leq i \leq r - \frac{d+1}{2}$ , le predette forme fondamentali costituiscono la base minima dei sistemi  $\Gamma, \infty^d$  di rette dell' $S_r$  <sup>(2)</sup>.

b) Dopo quanto precede, circa il problema della base relativo ai sistemi di rette dell' $S_r$ , perverremo alla risoluzione del problema

<sup>(1)</sup> Cfr. SEVERI, *La base per le varietà algebriche di dimensione qualunque contenute in una data e la teoria generale delle corrispondenze ecc.* «Memorio della R. Accademia d'Italia» 1934, XII.

<sup>(2)</sup> Per  $d=R-1$ ,  $R-2$  ed  $r=3$  si ritrovano gli esempi accennati da SEVERI nella Mem. citata in nota 1 a pag. 171, pag. 197; in tale Memoria la su-esposta variazione è ottenuta, per  $d=R-2$  a mezzo di omologie e per  $d=R-1$  a mezzo di omografie biassiali degeneri. Osserviamo a tal proposito che anche l'uso delle omografie biassiali è estensibile al caso generale qui trattato.

generale della base, per i sistemi di  $S_k$  dell'  $S_r$ , con metodo induttivo.

Poichè abbiamo dimostrato che è possibile, con variazione continua, trasformare ogni sistema algebrico di rette in una combinazione lineare ( $a$  e n. 1) di forme di SCHUBERT, possiamo ammettere il problema risoluto per i sistemi  $\Gamma_{d_1}^*$ ,  $\infty^{d_1}$  di  $S_{k_1}$  dell'  $S_r$ , dove  $k_1 \leq k-1$  ed  $r_1 \leq r$ , e risalire da questi ai sistemi  $\Gamma$  di  $S_k$  dell'  $S_r$ . Ci basta ammettere, in particolare, già risoluto il problema della base per  $k_1 = k-1$ ,  $r_1 = r-1$ ; ammettere cioè che la base minima per il sistema  $\Gamma_{d_1}^*$  sia costituita da forme fondamentali di SCHUBERT  $[a_0, \dots, a_{k_1}]$ , di dimensione  $d_1$ , dove  $d_1 = \sum_{i=0}^{k_1} a_i - \frac{1}{2} k_1 (k_1 + 1)$ .

4. LA BASE DEI SISTEMI  $\infty^d$  DI  $S_k$  IN GENERALE. — Per risolvere infine il problema della base in generale, si tenga presente quanto è acquisito al n. 2; e cioè che, per  $d \geq r-k$ , la variazione continua ivi applicata porta a trasformare il dato sistema  $\Gamma_d$  nel modo che segue.

a) In primo luogo si ottiene un sistema  $\Gamma'$ , da contarsi più volte, costituito da tutti e soli gli  $S_k$  dell'  $S_r$  incidenti l'iperpiano  $\Pi_1$  negli  $S_{k-1}$  traccia su questo iperpiano degli  $S_k$  di  $\Gamma$  uscenti da  $O_1$ .

Questi  $S_{k-1}$  formano un sistema  $\Gamma_{d_1}^*$  ( $d_1 < d$ ) dell'iperpiano  $\Pi_1$ , sistema che è quindi riducibile (n. 3, b) a forme fondamentali  $[a_0, \dots, a_{k_1}]$ , da contarsi un certo numero di volte. Per cui da queste forme, che costituiscono la base minima di  $\Gamma_{d_1}^*$  (n. 3, b), si ottengono tutte e sole quelle formanti la base (minima) del sistema  $\Gamma'$  anzidetto; queste ultime forme sono evidentemente quelle costituite dagli  $S_k$  dell'  $S_r$  passanti per gli  $S_{k-1}$  delle forme fondamentali sopra indicate.

Ne segue che, se è  $d \geq R-k$ , anche gli ulteriori  $S_k$  limiti, che coincidono con le proiezioni degli  $S_k$  di  $\Gamma$  da  $O_1$  su  $\Pi_1$  (n. 2, d), appartengono al sistema  $\Gamma'$  anzidetto e quindi, in questo caso, la base minima di  $\Gamma'$ , sopra determinata, coincide con quella di  $\Gamma$ ; ed è in tal modo completamente risoluto il problema della base dei sistemi  $\Gamma$  siffatti<sup>(1)</sup>.

b) Se invece è  $d < R-k$  l'ulteriore sistema di spazi limiti, che coincide sempre con la proiezione  $\Gamma^{[1]}$  del dato sistema  $\Gamma$  da

<sup>(1)</sup> Per  $d = R-1$  si ritrova l'esempio dato da SEVERI, Mem. citata in nota I a pag. 171, pag. 195.



$O_1$  su  $\Pi_1$  (n. 2, b), non appartiene al sistema  $\Gamma'$  dianzi accennato. Si ottiene quindi un nuovo sistema,  $\infty^d$  di  $S_k$  dell' $S_{r-1}$ ; per cui è  $R_1 = (k+1)(r-k-1) = R - (k+1)$ .

Allora se è  $d \geq R_1 - k$  si ricade nel caso precedente, e quindi al sistema  $\Gamma^{[1]}$  si possono applicare le conclusioni di già acquisite onde ridurlo in forme fondamentali. In tal modo è risoluto completamente il problema della base del dato sistema  $\Gamma$ . E difatti queste ultime forme insieme a quelle considerate in a) costituiscono la base minima del sistema  $\Gamma$ . Nel caso invece in cui risulta  $d < R_1 - k$  si procede nei riguardi del sistema  $\Gamma^{[1]}$  come si è prima operato nei riguardi di  $\Gamma$  (proiettando cioè  $\Gamma^{[1]}$  su un iperpiano  $\Pi_2$  di  $\Pi_1$ ); si ottiene così un nuovo sistema  $\infty^d \Gamma^{[2]}$  dell' $S_{r-2}$ , per cui è  $R_2 = R - 2(k+1)$ . Se è  $d \geq R_2 - k$  si ricade nel caso precedente e quindi è raggiunta la soluzione della questione.

Se invece è  $d < R_2 - k$ , si continua nel modo indicato, fino ad ottenere un sistema  $\Gamma^{[s]}$  dell' $S_{r-s}$ , con  $d \geq R_s - k$ ; e si perviene così alla soluzione del problema della base per il dato sistema  $\Gamma$ .

c) Infine il caso  $d < r - k$  può rientrare, senz'altro, in quelli dianzi esaminati, considerando la proiezione  $\Gamma_d^{[s]}$  del dato sistema su un  $S_{r-s}$ , con  $r-s = d+k$ , (n. 2, c). Ne segue concludendo, che:

*un qualsiasi sistema algebrico  $\infty^d$  di  $S_k$  dell' $S_r$ ,  $0 < d < (r-k)(k+1)$ , si può ridurre mediante variazione continua ad una somma delle forme fondamentali:*

$$\sum v_{a_0 \dots a_k} [a_0, \dots, a_k],$$

dove le  $a_n$  ( $n=0, 1, \dots, k$ ) sono numeri interi soddisfacenti alle condizioni indicate nelle premesse, e  $v_{a_0 \dots a_k}$  sono i caratteri del sistema. Le dette forme costituiscono perciò la base minima per i sistemi algebrici  $\infty^d$  di  $S_k$  dell' $S_r$ .