

SU ALCUNE FORMULE DI VALUTAZIONE NEL CALCOLO OPERATORIO FUNZIONALE (*)

(Con una figura)

GIUSEPPE APRILE

SUMMARIVM — Auctor disserit de quibusdam formulis quibus valutatio operatorum typi $\frac{f(\Delta)}{(\Delta + a)^n}$ vel similium fieri potest, ostenditque earum applicationem ad simplicem quemdam casum.

1. — È notoriamente di grande utilità, nella trasformazione o semplificazione delle espressioni simboliche del calcolo operatorio funzionale, in vista della loro valutazione, il così detto « teorema di trasposizione », espresso dalla relazione:

$$[1] \quad f(\Delta + a) V(t) = e^{-at} f(\Delta) \cdot e^{at} V(t)$$

Supponiamo che occorra di valutare un operatore del tipo $\frac{f(\Delta)}{\Delta + a}$, nel caso che sia nota la funzione generatrice $G(t)$ di $f(\Delta)$.
Può scriversi allora, per la [1]:

$$\frac{f(\Delta)}{\Delta + a} Fu(t) = \frac{f(\Delta + a - a)}{\Delta + a} Fu(t) = e^{-at} \frac{f(\Delta - a)}{\Delta} Fu(t) = e^{-at} \int_0^t [f(\Delta - a) Fu(t)] dt$$

e tenendo conto di nuovo della [1]:

$$[2] \quad \frac{f(\Delta)}{\Delta + a} Fu(t) = e^{-at} \int_0^t e^{at} G(t) dt$$

formula che permette di ricavare subito la valutazione cercata.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Giovanni Giorgi, il 1° settembre 1942.

Applicando reiteratamente la [2], possono scriversi le seguenti altre relazioni, pure suscettibili di utile impiego nei casi pratici:

$$[3] \quad \frac{f(\Delta)}{(\Delta + a)^2} Fu(t) = e^{-at} \int_0^t dx \int_0^x e^{ay} \cdot G(y) dy$$

$$[4] \quad \frac{f(\Delta)}{\Delta^2 - a^2} Fu(t) = e^{-at} \int_0^t e^{2ax} dx \int_0^x e^{-ay} \cdot G(y) dy$$

$$[5] \quad \frac{f(\Delta)}{(\Delta + a)^N} Fu(t) = e^{-at} \int_0^t dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{N-1}} e^{ax_N} \cdot G(x_N) dx_N$$

(N = intero > 2)

ed altre analoghe se ne possono pure agevolmente ottenere.

2. - Per mostrare un'applicazione facile e rapidamente verificabile, consideriamo il seguente caso pratico. Sia un circuito contenente in serie una resistenza R ed una induttanza L, alimentato a partire dall'istante $t=0$ da una f.e.m. $V(t)$ di andamento a «denti di sega», come nell'unita figura, di periodo T e di valor massimo eguale a 1 volt. Si tratta di trovare l'andamento della corrente $I(t)$ nel fenomeno di inserzione, per un numero qualunque di periodi.

Si ha:

$$I(t) = \frac{1}{L} \frac{1}{\Delta + \rho} V(t)$$

essendo $\rho = \frac{R}{L}$.

L'operatore $\varphi(\Delta)$ la cui funzione generatrice integrale o caratteristica ha lo stesso andamento, sopra accennato, della $V(t)$ è noto, e vale

$$\varphi(\Delta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{T\Delta} - \frac{1}{2} \text{Coth} \frac{T\Delta}{2}$$

Si può dunque porre, essendo $V(t) = \varphi(\Delta) 1(t)$:

$$I(t) = \frac{1}{L(\Delta + \rho)} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{T\Delta} - \frac{1}{2} \text{Coth} \frac{T\Delta}{2} \right] 1(t)$$

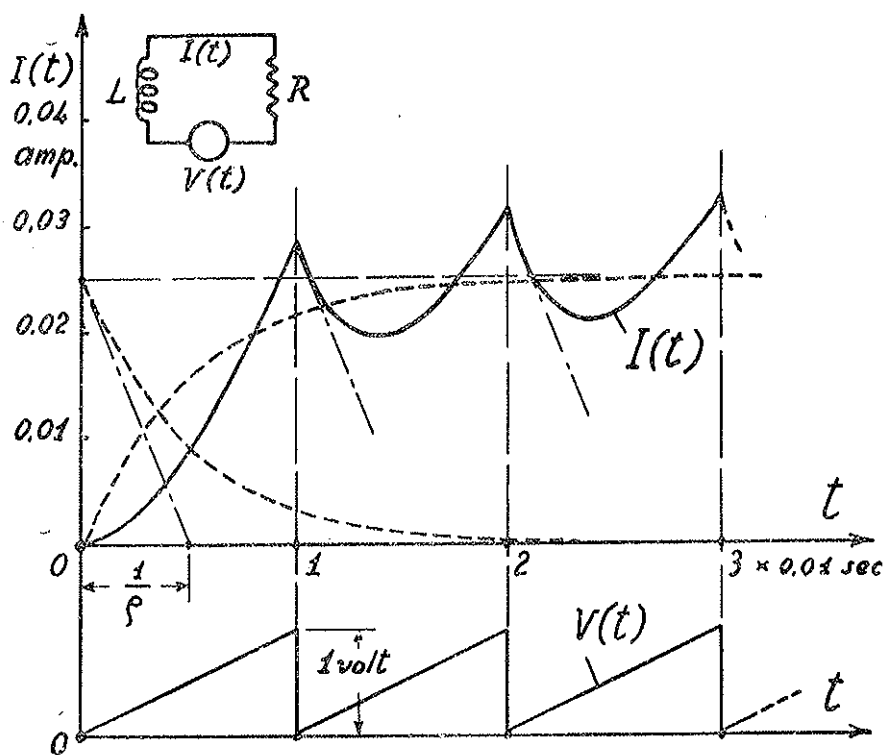


FIG. 1.

cioè:

$$[6] \quad I(t) = \left[\frac{1}{2L(\Delta + \rho)} + \frac{1}{TL\Delta(\Delta + \rho)} - \frac{\text{Coth} \frac{T\Delta}{2}}{2L(\Delta + \rho)} \right] 1(t)$$

Dei tre operatori che compaiono nella parentesi quadra, i primi due sono di immediata valutazione, essendo:

$$[7] \quad \frac{1}{2L(\Delta + \rho)} 1(t) = \frac{1}{2L\rho} (1 - e^{-\rho t})$$

$$[8] \quad \frac{1}{TL\Delta(\Delta + \rho)} 1(t) = \frac{1}{TL\rho} \left(t - \frac{1}{\rho} + \frac{e^{-\rho t}}{\rho} \right)$$

Per valutare il terzo *può appunto applicarsi la regola* [2], partendo dalla valutazione, ben nota, dell'operatore $\text{Coth } \frac{T \Delta}{2}$:

$$\text{Coth } \frac{T \Delta}{2} F u(t) = G(t) = F u(t) + 2 \sum_{r=1}^{r=\infty} F u(t - rT)$$

Applicando l'anzidetta regola, e poi integrando ancora, si ottiene:

$$[9] \quad \frac{\text{Coth } \frac{T \Delta}{2}}{\Delta + \rho} 1(t) = \frac{1}{\rho} (1 - e^{-\rho t}) + \frac{2}{\rho} \sum_{r=1}^{r=\infty} [1 - e^{-\rho(t-rT)}] \cdot 1(t - rT)$$

Dalla [6], allora, mediante le [7], [8], [9], si ricava l'espressione cercata di $I(t)$:

$$I(t) = \frac{1}{T L \rho} \left(t - \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} e^{-\rho t} \right) - \frac{1}{\rho L} \sum_{r=1}^{r=\infty} [1 - e^{-\rho(t-rT)}] \cdot 1(t - rT)$$

cioè un andamento come indicato nella figura, per il seguente caso particolare: $R=20$ ohm; $L=0,1$ henry; $\rho=200$ $1/\text{sec}$; $T=0,01$ sec; $V_{\text{max}}=1$ volt. Si noti, a modo di verifica, che la curva ondulata tende ad oscillare attorno al valor medio della corrente, che, come è immediatamente ricavabile, dev'essere eguale a $0,025$ amp.