

SULLE FUNZIONI DELLE MATRICI(*)

XENIA COLOMBO

SVMMARIVM. — Computantur formulae explicitae functionum matricis tertii ordinis, cum saecularis aequationis radices cognoscuntur.

Exponitur praeterea ratio, qua computari possunt potentiae alicuius matricis, sine praevia solutione saecularis aequationis.

Qua ratione, quod ad matrices secundi ordinis, inveniri possunt formulae aliter notae; quod vero ad matrices tertii ordinis attinet, formulae quaedam inveniuntur antea forsitan ignotae.

1. INTRODUZIONE. — Sia Φ una matrice di ordine h , a_{rs} un suo elemento generico, $f(z)$ una funzione analitica a un sol valore della variabile z . La definizione generale del simbolo $f(\Phi)$ cioè di funzione di una matrice è stata posta nel 1928 da S. E. G. GIORGI⁽¹⁾ ed è, in sostanza, la seguente.

Si suppongono le radici $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_h$ dell'equazione secolare, della Φ , tutte distinte e non nulle. Potremo scrivere, come è noto:

$$\Phi = \Psi \begin{vmatrix} \rho_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \rho_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \rho_{h-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \rho_h \end{vmatrix} \Psi^{-1}$$

essendo Ψ una opportuna matrice, Ψ^{-1} la sua inversa.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Giovanni Giorgi, nella Tornata del 20 febbraio 1942.

(1) G. GIORGI, *Sulle funzioni delle matrici*, « Rendiconti R. Accademia dei Lincei », serie VI, vol. VII, 1928₁, pagg. 178-184; *Nuove osservazioni sulle funzioni delle matrici*, idem, serie VI, vol. VIII, 1928₂, pagg. 1-8.

Il GIORGI pone come definizione di $f(\Phi)$:

$$f(\Phi) = \Psi \begin{vmatrix} f(\rho_1) & \dots & 0 \\ 0 & f(\rho_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f(\rho_{h-1}) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & f(\rho_h) \end{vmatrix} \Psi^{-1}$$

Tale definizione è stata estesa, nelle note citate, al caso in cui le $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_h$ abbiano valori nulli o uguali tra loro.

In seguito ai lavori del GIORGI sono apparse numerose ricerche sulle funzioni delle matrici. In una nota di grande interesse il Professor FANTAPPIÈ⁽¹⁾, facendo uso della sua teoria dei funzionali analitici, è giunto alla seguente formula per il termine generico f_{rs} , di $f(\Phi)$

$$f_{rs} = -\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{D_{sr}(z)}{D(z)} f(z) dz$$

dove

$$D(z) = \begin{vmatrix} a_{11} - z & a_{12} & \dots & a_{1h} \\ a_{21} & a_{22} - z & \dots & a_{2h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots & a_{hh} - z \end{vmatrix}$$

e $D_{sr}(z)$ è il complemento algebrico del determinante $D(z)$ rispetto all'elemento della riga s -esima e della colonna r -esima, c una curva (di cui supponiamo l'esistenza) che contiene nel suo interno le radici di $D(z)$ e all'esterno i punti singolari di $f(z)$.

Le formule del FANTAPPIÈ possono compendiarsi nella seguente formula del CARTAN⁽²⁾:

$$f(\Phi) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z - \Phi} dz$$

⁽¹⁾ L. FANTAPPIÈ, *Le calcul des matrices*, « Comptes Rendu de l'Académie des Sciences », t. 186, I semestre, 1928, pagg. 619-621.

⁽²⁾ Cfr. la pag. 7 della seconda nota del GIORGI già citata.

Le formule del FANTAPPIÈ e del CARTAN, equivalenti, salvo casi eccezionali, a quelle del GIORGI, possono in molti casi agevolare il calcolo di $f(\Phi)$.

Ricordiamo poi un'altra notevole memoria del CIPOLLA⁽¹⁾ che ha studiato a fondo anche il caso, escluso in questa nota, di $f(z)$ a più valori.

In altri interessanti lavori si ricerca la forma esplicita della matrice $f(\Phi)$. Il problema è stato sufficientemente risolto per le matrici del secondo ordine in seguito a lavori di M. BOTTASSO⁽²⁾ E. PORCU-TORRINI⁽³⁾, S. MARTIS in BIDDAU⁽⁴⁾.

In questa nota intendiamo svolgere analoghi studi per le matrici del terzo ordine la cui importanza, geometrica e meccanica è ben nota.

Partendo dalle formule del FANTAPPIÈ noi calcoleremo la $f(\Phi)$ comunque siano le radici di $D(z)=0$. Si otterranno però formule, in cui appaiono le radici dell'equazione secolare di Φ .

Ora il GIORGI ha proposto, almeno per Φ^n , di stabilire espressioni che non richiedano la soluzione dell'equazione $D(z)=0$

Abbiamo perciò sviluppato un metodo atto a questo scopo. Esso consiste sostanzialmente nell'osservare che f_{rs} vale il residuo rispetto al punto all'infinito di $z^n \frac{D_{rs}(z)}{D(z)}$, e nel calcolare tale residuo in un modo opportuno che esporremo a suo luogo. Otterremo così, per le matrici del secondo ordine, le formule di E. PORCU-TORRINI, che però verranno da noi dedotte per tutt'altra via; per quelle del terzo ordine formule che riteniamo nuove. Il nostro metodo potrebbe estendersi a matrici di qualunque ordine, ma i calcoli sarebbero assai complicati.

⁽¹⁾ M. CIPOLLA, *Sulle matrici espressioni analitiche di un'altra*, « Rend. Circolo Matematico di Palermo », t. LVI, 1932, pp. 144-154.

⁽²⁾ M. BOTTASSO, *Omografie vettoriali del piano*. « Rend. Circolo Matematico di Palermo », t. XXXV, 1913, pagg. 1-46.

⁽³⁾ E. PORCU-TORRINI, *Sulle potenze delle matrici del secondo ordine*, « Atti della Pontificia Accademia delle Scienze — I Nuovi Lincei », vol. LXXX, pagg. 150-153, 1927; *Calcolo delle potenze delle matrici del secondo ordine*, idem, pagg. 277-281; *Terzo procedimento per il calcolo delle matrici del secondo ordine*, idem, pagg. 348-353; *Calcolo delle funzioni qualunque delle matrici del secondo ordine*, « Rend. Accademia dei Lincei », serie VI, vol. VII, 1928₁, pagg. 206-208.

⁽⁴⁾ SILVIA MARTIS in BIDDAU, *Ricerche di una espressione razionale per le potenze di una matrice di secondo ordine*, « Rend. Accademia dei Lincei », serie VI, vol. VIII, 1928₂, pagg. 130-133.

2. CALCOLO DI $f(\Phi)$ PER MATRICI DEL TERZO ORDINE MEDIANTE LE RADICI DELL'EQUAZIONE SECOLARE. — Sia:

$$[1] \quad \Phi = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

una matrice del terzo ordine.

Poniamo:

$$[2] \quad D(z) = \begin{vmatrix} a_{11} - z & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - z & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - z \end{vmatrix}$$

Indichiamo con f_{rs} il termine generico di $f(\Phi)$, avremo:

$$[3] \quad f_{rs} = -\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{D(z)} D_{rs}(z) dz$$

dove i significati di D_{rs} e c sono stati indicati nell'introduzione.

Se ora indichiamo con ρ_1, ρ_2, ρ_3 le radici di z , sarà

$$D(z) = -(z - \rho_1)(z - \rho_2)(z - \rho_3)$$

Se ρ_1, ρ_2, ρ_3 sono distinte, il calcolo di f_{rs} applicando una formula già data dai FANTAPPIÈ⁽¹⁾ è immediato. Infatti, poichè è:

$$D'(\rho_1) = -(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 - \rho_3); D'(\rho_2) = -(\rho_2 - \rho_1)(\rho_2 - \rho_3); D'(\rho_3) = -(\rho_3 - \rho_1)(\rho_3 - \rho_2)$$

(1) Si allude alla formula

$$f_{rs} = -\sum_i^n \frac{D_{rs}(\rho_i) f'(\rho_i)}{D'(\rho_i)}$$

dove ρ_i sono le radici di $D(z)$.

Si ha:

$$f_{rs} = \frac{D_{s,r}(\rho_1)}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 - \rho_3)} f(\rho_1) + \frac{D_{s,r}(\rho_2)}{(\rho_2 - \rho_1)(\rho_2 - \rho_3)} f(\rho_2) + \frac{D_{s,r}(\rho_3)}{(\rho_3 - \rho_1)(\rho_3 - \rho_2)} f(\rho_3)$$

Passiamo ora al caso di due radici coincidenti, sia ad esempio $\rho_1 = \rho_3$. Si deve allora valutare l'integrale:

$$f_{rs} = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{(z - \rho_1)^2 (z - \rho_2)} D_{sr}(z) dz$$

che si scinde nei due residui R_1, R_2 della funzione integranda intorno a ρ_2 e intorno a ρ_1 . Ora è facile vedere che

$$R_1 = \frac{f(\rho_2) D_{sr}(\rho_2)}{(\rho_2 - \rho_1)^2}$$

Si ha poi per le formule note⁽¹⁾

$$R_2 = \frac{[f(\rho_1) D_{sr}(\rho_1)]'}{\rho_1 - \rho_2} - \frac{f(\rho_1) D_{s,r}(\rho_1)}{(\rho_1 - \rho_2)^2}$$

Quindi

$$f_{rs} = \frac{[f(\rho_1) D_{sr}(\rho_1)]'}{\rho_1 - \rho_2} + \frac{f(\rho_2) D_{sr}(\rho_2)}{(\rho_2 - \rho_1)^2} - \frac{f(\rho_1) D_{s,r}(\rho_1)}{(\rho_2 - \rho_1)^2}.$$

Se le tre radici sono coincidenti si ha:

$$f_{rs} = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z) D_{sr}(z)}{(z - \rho_1)^3} dz$$

⁽¹⁾ Cfr. PINCHERLE, *Gli elementi della teoria delle funzioni analitiche*. Bologna, Zanichelli, 1928, cap. VII, § 104, formula (6). Per applicare questa formula al nostro caso occorre porre:

$$f(z) = \frac{1}{(z - \rho_1)^2} \quad g(z) = \frac{f(z) D_{rs}(z)}{z - \rho_2}$$

e per la formula già citata,

$$f_{rs} = \frac{[f(\rho_1) D_{sr}(\rho_1)]''}{2}$$

3. CALCOLO DI Φ INDIPENDENTEMENTE DALLA RISOLUZIONE DELLA EQUAZIONE SECOLARE, CASO DELLE MATRICI DEL SECONDO ORDINE. — Consideriamo una matrice del secondo ordine

$$\Phi = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Applicando le formule del FANTAPPIÈ, si ottiene subito

$$\Phi^n = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{(z - a_{22}) z^n}{z^2 - \alpha z - \beta} dz & \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{a_{12} z^n}{z^2 - \alpha z - \beta} dz \\ \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{a_{21} z^n}{z^2 - \alpha z - \beta} dz & \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{(z - a_{11}) z^n}{z^2 - \alpha z - \beta} dz \end{vmatrix}$$

dove:

$$z^2 - \alpha z - \beta = D(z) = (a_{11} - z)(a_{22} - z) - a_{12} a_{21}$$

Ossia:

$$\alpha = a_{11} + a_{22} \qquad \beta = a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22}$$

Orbene vogliamo valutare gli integrali che compaiono nella espressione di Φ^n evitando il metodo dei residui e perciò la soluzione dell'equazione secolare.

Cominciamo a valutare f_{11} , chè per gli altri integrali si può usare un procedimento analogo.

Poichè (c) deve soddisfare soltanto alla proprietà di contenere nel suo interno le radici di $D(z) = 0$, potremo prendere per (c) un cerchio, di raggio r arbitrario purchè maggiore della più grande

radice di $D(z)$. Noi sceglieremo inoltre r in modo che su c sia $\left| \frac{\alpha}{z} + \frac{\beta}{z^2} \right| \leq x < 1$. Ciò permette di scrivere:

$$\frac{1}{z^2 - \alpha z - \beta} = \frac{1}{z^2 \left(1 - \frac{\alpha}{z} - \frac{\beta}{z^2} \right)} = \sum_0^{\infty} \frac{1}{z^2} \left(\frac{\alpha}{z} + \frac{\beta}{z^2} \right)^m$$

e la serie al secondo membro è assolutamente e uniformemente convergente su tutta (c) .

Si ha allora:

$$f_{11} = \sum_0^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{z^{n-1}}{z^m} \left(\alpha + \frac{\beta}{z} \right)^m dz - a_{22} \sum_0^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{z^{n-2}}{z^m} \left(\alpha + \frac{\beta}{z} \right)^m dz$$

Osserviamo ora che gli integrandi dei vari termini della sommatoria sono somme di potenze di z .

Allora ricordando che se k è intero:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c z^k dz \text{ vale } 1, \text{ per } k = -1; 0, \text{ per } k \neq -1$$

potremo limitarci a considerare i termini degli integrandi che contengono z alla potenza -1 .

Ciò posto, consideriamo la prima sommatoria della f_{11} . Un termine generico dell'integrando corrispondente all'indice m vale, sviluppando il binomio

$$\binom{m}{\tau} \alpha^{\tau} \beta^{m-\tau} z^{n-2m+\tau-1}$$

Ora affinchè questo termine sia di grado -1 deve essere

$$[10] \quad \tau = 2m - n$$

D'altra parte deve essere

$$0 \leq \tau \leq m$$

Quindi sarà:

$$m \geq \frac{n}{2} \quad m \leq n$$

Concludiamo intanto che è possibile limitare la nostra sommatoria ai valori di m compresi fra il minimo intero uguale o superiore a $\frac{n}{2}$ (numero che indicheremo con N_1) ed n

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{z^{n-1}}{z^m} \left(\alpha + \frac{\beta}{z} \right)^m = \sum_{N_1}^n \binom{m}{2m-n} \alpha^{2m-n} \beta^{n-m}$$

o anche prendendo come indice per la sommatoria $p = n - m$ e ricordando che

$$\binom{m}{2m-n} = \binom{m}{n-m} = \binom{n-p}{p}$$

si ha:

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{z^{n-1}}{z^m} \left(\alpha + \frac{\beta}{z} \right)^m = \sum_{0}^{N'} \binom{n-p}{p} \alpha^{n-2p} \beta^p$$

dove N' è il massimo intero inferiore o uguale a $\frac{n}{2}$.

Per ottenere l'altra sommatoria che compare in f_{11} basta porre in luogo di $n, n-1$, e perciò in luogo di N', N'' massimo numero intero, inferiore o uguale a $\frac{n-1}{2}$. Si ha così:

$$\left\{ \begin{aligned} f_{11} &= \sum_{0}^{N'} \binom{n-p}{p} \alpha^{n-2p} \beta^p - a_{22} \sum_{0}^{N''} \binom{n-1-p}{p} \alpha^{n-1-2p} \beta^p \\ f_{12} &= a_{12} \sum_{0}^{N''} \binom{n-1-p}{p} \alpha^{n-1-2p} \beta^p \\ f_{21} &= a_{21} \sum_{0}^{N''} \binom{n-1-p}{p} \alpha^{n-1-2p} \beta^p \\ f_{22} &= \sum_{0}^{N'} \binom{n-p}{p} \alpha^{n-2p} \beta^p - a_{11} \sum_{0}^{N''} \binom{n-1-p}{p} \alpha^{n-1-2p} \beta^p \end{aligned} \right.$$

Formule, in sostanza, identiche a quelle trovate da E. PORCU-TORTRINI nella prima delle note citate.

4. CALCOLO DI Φ^n INDIPENDENTEMENTE DALLA RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE CUBICA, CASO DELLE MATRICI DEL TERZO ORDINE. — Dalla nostra definizione abbiamo:

$$\Phi^n = - \begin{vmatrix} \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{D_{44}(z) z^n}{D(z)} dz & \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{D_{24}(z) z^n}{D(z)} dz & \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{D_{34}(z) z^n}{D(z)} dz \\ \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{D_{12}(z) z^n}{D(z)} dz & \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{D_{22}(z) z^n}{D(z)} dz & \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{D_{32}(z) z^n}{D(z)} dz \\ \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{D_{13}(z) z^n}{D(z)} dz & \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{D_{23}(z) z^n}{D(z)} dz & \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{D_{33}(z) z^n}{D(z)} dz \end{vmatrix}$$

Come sappiamo $-D(z)$ è un polinomio di terzo grado che ci conviene mettere nella forma:

$$-D(z) = z^3 - \alpha z^2 - \beta z - \gamma$$

dove α, β, γ sono termini di facile calcolo mediante le a_{rs} . In particolare $\alpha = a_{44} + a_{22} + a_{33}$, verrà detto invariante primo di Φ . Orbene noi possiamo sempre per il calcolo di Φ^n ridurci al caso in cui sia $\alpha = 0$.

Ciò perchè una matrice ad invariante primo non nullo può mettersi sempre come somma di potenza di matrici con invariante primo nullo e della matrice unità. Allora, sempre in base alle notazioni del GIORGI, che identifica la matrice unitaria con l'unità ordinaria:

$$\Phi = \left(\Phi - \frac{\alpha}{3} \right) + \frac{\alpha}{3}$$

Ora l'invariante primo di $\left(\Phi - \frac{\alpha}{3} \right)$ è nullo, come risulta subito da un facile calcolo. Si ha poi

$$\begin{aligned} \Phi^n = \left[\left(\Phi - \frac{\alpha}{3} \right) + \frac{\alpha}{3} \right]^n &= \binom{n}{1} \frac{\alpha}{3} \left(\Phi - \frac{\alpha}{3} \right)^{n-1} + \binom{n}{2} \left(\frac{\alpha}{3} \right)^2 \left(\Phi - \frac{\alpha}{3} \right)^{n-2} + \\ &+ \dots + \binom{n}{r} \left(\frac{\alpha}{3} \right)^{n-r} \left(\Phi - \frac{\alpha}{3} \right)^r + \dots + \left(\frac{\alpha}{3} \right)^n \end{aligned}$$

Quindi senza togliere nulla alla generalità della questione potremo supporre $\alpha = 0$.

Per calcolare Φ^n dovremo perciò calcolare i seguenti integrali:

$$f_{rr} = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{z^n D_{rr}(z)}{z^3 - \beta z - \gamma} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{z^n (z^2 + b_{rr}z + d_{rr})}{z^3 - \beta z - \gamma} dz$$

$$f_{rs} = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{z^n D_{rs}(z)}{z^3 - \beta z - \gamma} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{z^n (v_{rs}z + w_{rs})}{z^3 - \beta z - \gamma} dz$$

con ovvio significato dei simboli $b_{rr}, d_{rr}, v_{rs}, w_{rs}$.

È facile vedere allora che il nostro problema si riduce al calcolo di integrali del tipo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{z^{t+3}}{z^3 - \beta z - \gamma} dz \equiv I$$

dove $t+3$ può valere $n+2, n+1, n$.

Perciò osserviamo intanto che

$$I \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{z^t}{1 - \left(\frac{\beta}{z^2} + \frac{\gamma}{z^3} \right)} dz$$

Ora, come nel caso delle matrici del secondo ordine, potremo prendere per (c) un cerchio di raggio così grande che, su esso, sia

$$\left| \frac{\beta}{z^2} + \frac{\gamma}{z^3} \right| \leq \kappa < 1.$$

Si ha così:

$$I \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_c z^{t-2m} \left(\beta + \frac{\gamma}{z} \right)^m dz$$

Ma gli unici termini dello sviluppo che danno risultato non nullo sono quelli in z^{-1} . Per calcolarli osserviamo che:

$$z^{t-2m} \left(\beta + \frac{\gamma}{z} \right)^m = z^{t-2m} \sum_{\tau=0}^m \binom{m}{\tau} \beta^{\tau} \left(\frac{\gamma}{z} \right)^{m-\tau}$$

Quindi il valore di τ che corrisponde al termine in z^{-1} deve essere tale che

$$t - 2m - m + \tau = -1$$

Cioè

$$\tau = 3m - t - 1$$

Ma deve essere

$$\tau \geq 0; \quad \tau \leq m$$

Quindi

$$m \geq \frac{t+1}{3}; \quad m \leq \frac{t+1}{2}$$

Dunque m può variare solo fra il minimo intero superiore od uguale a $\frac{t+1}{3}$ e $\frac{t+1}{2}$ se t è dispari; fra il minimo intero superiore od uguale a $\frac{t+1}{3}$ e il massimo intero inferiore a $\frac{t+1}{2}$ se t è pari. Si ha allora, convenendo che $\frac{t+1}{3}$ sia il numero intero superiore od uguale a $\frac{t+1}{3}$ e $\frac{t+1}{2}$ il numero intero inferiore o uguale a $\frac{t+1}{2}$, ricordando che $\binom{m}{3m-t-1} = \binom{m}{t+1-2m}$

$$I \equiv \sum_{\frac{t+1}{3}}^{\frac{t+1}{2}} \binom{m}{t+1-2m} \beta^{3m-t-1} \gamma^{t+1-2m}$$

Possiamo sommare invece che rispetto ad m rispetto a $p = t+1-2m$; p allora varierà per numeri pari se $t+1$ è pari, per numeri dispari se $t+1$ è dispari, fra zero⁽¹⁾ e il massimo intero inferiore od uguale a $\frac{t+1}{3}$ che indicheremo con $N\left(\frac{t+1}{3}\right)$; perciò:

$$I \equiv \sum_{p=0}^{N\left(\frac{t+1}{3}\right)} \binom{\frac{1}{2}(t+1-p)}{p} \beta^{\frac{1}{2}(t+1-3p)} \gamma^p$$

(1) Lo zero va considerato come numero pari.

e il simbolo Σ' indica che la somma è fatta solo per valori pari o dispari di p .

Con questa formula ponendo al posto di t i suoi valori in funzione di n si trova il valore dei nove integrali. Possiamo così scrivere esplicitamente Φ^n i cui termini assumono la seguente espressione:

$$\begin{aligned}
 f_{rr} = & \sum_0^{\frac{N(\frac{n}{3})}{p}} \left(\frac{1}{2} \binom{n-p}{p} \right) \beta^{\frac{1}{2}(n-3p)} \gamma^p + b_{rr} \sum_0^{\frac{N(\frac{n-1}{3})}{p}} \left(\frac{1}{2} \binom{n-1-p}{p} \right) \beta^{\frac{1}{2}(n-1-3p)} \gamma^p + \\
 & + d_{rr} \sum_0^{\frac{N(\frac{n-2}{3})}{p}} \left(\frac{1}{2} \binom{n-2-p}{p} \right) \beta^{\frac{1}{2}(n-2-3p)} \gamma^p \\
 f_{rs} = & v_{rs} \sum_0^{\frac{N(\frac{n-1}{3})}{p}} \left(\frac{1}{2} \binom{n-1-p}{p} \right) \beta^{\frac{1}{2}(n-1-3p)} \gamma^p + w_{rs} \sum_0^{\frac{N(\frac{n-2}{3})}{p}} \left(\frac{1}{2} \binom{n-2-p}{p} \right) \beta^{\frac{1}{2}(n-2-3p)} \gamma^p
 \end{aligned}$$