

## INTERPOLAZIONE E MEDIE (\*)

PIETRO MARTINOTTI

SUMMARIVM. — Auctor ostendit quam utile sit omnes interpolationis rationes ad unum reducere, ut ut nihil aliud sint nisi aequalitates inter opportunas medias valorum qui sint reperti et valorum qui computati sint. Ex hoc deducuntur quaedam proprietates mediarum, quae ex interpolatione profluunt, et nonnulla perpenduntur de aptitudine huius rationis mediarum, quae ad elementorum functiones referantur.

1. CLASSIFICAZIONE DEI METODI D'INTERPOLAZIONE. — Esiste una notevole varietà di metodi ed artifici di interpolazione analitica di una prefissata funzione su un dato gruppo di osservazioni, i quali metodi si propongono, come scopo comune e principale, di determinare le equazioni necessarie al calcolo dei parametri di detta funzione. Prevalgono quelli che a tale scopo pervengono quale conseguenza di particolari condizioni imposte ai metodi stessi; altri, invece, si propongono direttamente ed unicamente di dare a quelle equazioni una particolare forma.

Stanno fra i primi, qualificabili come *indiretti*, i metodi:

A) dei minimi quadrati degli scarti fra i valori osservati ed i calcolati <sup>(1)</sup> al quale sono aggregabili, per la consistenza delle effettive operazioni interpolatorie, il metodo di trasformazione della variabile <sup>(2)</sup> e quello dei valori eccedenti <sup>(3)</sup>;

B) dei minimi quadrati degli stessi scarti, ma per unità di valori calcolati <sup>(4)</sup>;

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Marcello Boldrini, nella Tornata del 20 febbraio 1942.

(1) A. M. LEGENDRE, *Nouvelles methodes pour la determination des orbites des Comètes*, Paris, 1806.

(2) R. D'ADDARIO, *Barometro economico*, 1934-xii.

(3) R. D'ADDARIO, « *Annali Ist. Statist. Univ. di Bari* », 1939-xvii.

(4) K. PEARSON, *Philosophical Magazine*, London, 1901.

C) dei minimi quadrati dei medesimi scarti, ma per unità di valori osservati <sup>(1)</sup>;

D) dei minimi quadrati degli scarti fra i rapporti incrementali <sup>(2)</sup> dei valori predetti;

E) dei minimi quadrati degli scarti fra i rapporti incrementali dei valori osservati ed i corrispondenti valori della derivata dell'interpolante <sup>(3)</sup>;

F) dei minimi quadrati degli scarti fra i rapporti incrementali dei valori osservati, ma per unità di questi, ed i corrispondenti valori della derivata del logaritmo dell'interpolante <sup>(4)</sup>;

G) della massima attendibilità <sup>(5)</sup>.

Sono metodi *diretti* quelli:

H) dei momenti <sup>(6)</sup>;

I) delle somme, delle aree <sup>(7)</sup> e delle sintesi <sup>(8)</sup>;

L) delle differenze <sup>(9)</sup> e sue varianti <sup>(10)</sup>.

Da questo elenco rimangono esclusi, perchè sottraentisi alla trattazione che segue, alcuni noti metodi di approssimazioni successive.

Tanta dovizia di mezzi trova motivo, oltre che nell'importanza dello strumento d'indagine statistica che si sta trattando, nella tendenza a vieppiù conciliare le opposte esigenze della buona approssimazione con la semplicità dei calcoli. È ciò che va verificandosi pure nei riguardi delle medie, le quali oltre ad essere andate anch'esse, di recente, continuamente moltiplicandosi, si possono oggi abbracciare da un unico punto di vista, non solo, ma di qui si è inoltre riuscito ad

<sup>(1)</sup> F. NEYMAN, *Contribution to the theory of certain test criteria*, Varsavia, 1929.

<sup>(2)</sup> P. MARTINOTTI, « Riv. Int. Sc. Soc. », Milano, 1929-xvii.

<sup>(3)</sup> T. BAGNI, *Teoria matematica dei fenomeni collettivi*, Firenze, 1915 e P. MARTINOTTI, *loc. cit.*

<sup>(4)</sup> P. MARTINOTTI, *loc. cit.*

<sup>(5)</sup> R. A. FISHER, « Proceedings of the Roy Soc. of London », 1922.

<sup>(6)</sup> K. PEARSON, « Philos. trans. Roy Soc. », London, 1895.

<sup>(7)</sup> R. P. CANTELLI, *Sull'adattamento di curve su una serie di misure o di osservazioni*, Roma, 1905.

<sup>(8)</sup> R. MAGNO, « Metron », 1935-xiii.

<sup>(9)</sup> F. VINCI, « Ann. Ist. Sup. Sc. Econ. Comm. », Bari, 1926-iv.

<sup>(10)</sup> F. SIBIRANI, « Giorn. Ist. Ital. Attuari », Roma, 1934-xii; O. GUALDONI, « Ann. Econ. », Milano, 1889-xvii.

estendere lo sguardo, sino a comprendervi pure l'insieme dei metodi di interpolazione, i quali alle medie sono venuti a trovarsi strettamente legati.

Entrambe le visioni vanno attribuite alla superiore perspicacia di un matematico, al quale, per di più, esse apparivano così semplici e naturali, da limitarsi a lasciarne lieve traccia nella modesta sede di dispende litografate per le nostre Facoltà Economico-Commerciali (<sup>1</sup>).

Da ciò solo si potrebbe trarre sufficiente motivo di porre in degno rilievo l'importante connubio; altri si aggiungono che di quest'ultimo attestano la promettente fertilità, e precisamente:

la già asserita unificazione dei criteri, ai quali vengono sottoposte le condizioni riguardanti i parametri dell'interpolante:

la forma semplice, evidente e significativa del criterio unico;

la possibilità di un'ampia estensione nel campo della ricerca di nuovi metodi;

L'applicabilità di questi ad una interpolante di forma qualsiasi, cui viene lasciata la piena libertà di scelta, in armonia con l'andamento della successione dei dati.

2. TRASFORMAZIONE DELLE EQUAZIONI IN UGUAGLIANZE FRA MEDIE. — L'accostamento delle medie alle interpolazioni è il prodotto di due successive considerazioni.

La prima riguarda la comunione di quel particolare loro carattere, per il quale possono essere riferite ad una funzione dei dati avente un'analoga proprietà invariante: per le medie detta funzione non varia quando i dati sono uguagliati alla loro media; per l'interpolazione — come si rende evidente esaminando le equazioni espresse dai metodi diretti, e come per gl'indiretti si vedrà facilmente — quando si sostituiscono i valori osservati con i calcolati.

Dalla seconda considerazione viene prodotta una effettiva fusione dei due enti, dovuta all'identità dei mezzi analitici per dimostrare la nota proprietà della media aritmetica contenuta nel principio dei minimi quadrati, con quelli deducibili dalle condizioni di minimo o di massimo

---

(<sup>1</sup>) C. E. BONFERRONI, *Appunti di Statistica generale*, Torino, 1923-vi; *Elementi di Statistica generale*, Torino, 1940-xviii.

dei vari metodi indiretti le rispettive equazioni. Dall'identità di mezzi è da attendersi almeno una certa analogia dei risultati: come dalla media aritmetica vien dato il valore più plausibile di una incerta misura, così una conveniente media delle osservazioni potrà fornire valori meglio approssimati — relativamente a prefissate condizioni — per il calcolo dell'incognita interpolante.

Ciò come giustificazione logica del risultato proposto. Praticamente, a questo si perviene in modo molto semplice, perchè i sistemi di equazioni determinanti i parametri si presentano, anche per tutti i metodi indiretti, sotto forma facilmente traducibile in sistemi di uguaglianze fra medie dei valori osservati, dei calcolati e di loro funzioni: medie uguali per ogni singola equazione, differenti da l'una all'altra equazione di uno stesso sistema, relativo ad ogni singolo metodo, ed ancora variabili da l'uno all'altro metodo.

Siano le  $n+1$  coppie di valori osservati:

$$x_0, y_0 \quad x_1, y_1 \quad x_2, y_2 \quad \dots \quad x_n, y_n$$

da interpolare mediante una prescelta funzione  $f(x)$  contenente gli  $h$  parametri  $a_1, a_2 \dots a_h$ .

Per ognuno dei predetti metodi, si fanno qui seguire: \*

la  $j$ (esima) delle  $h$  equazioni determinanti questi parametri,  
la sua trasformata secondo il criterio prefissato,  
la specificazione della corrispondente media.

$$A) \quad \sum_{i=0}^n \{y_i - f(x_i)\} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j} = 0; \quad \frac{\sum_{i=0}^n y_i \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}}{\sum_{i=0}^n \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}} = \frac{\sum_{i=0}^n f(x_i) \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}}{\sum_{i=0}^n \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}}$$

media aritmetica ponderata, con pesi  $\frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}$ .

$$B) \quad \sum_{i=0}^n \left\{ \frac{y_i^2}{f^2(x_i)} - 1 \right\} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j} = 0; \quad \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^n \frac{y_i^2}{f^2(x_i)} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}}{\sum_{i=0}^n \frac{1}{f^2(x_i)} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^n \frac{f^2(x_i)}{f^2(x_i)} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}}{\sum_{i=0}^n \frac{1}{f^2(x_i)} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}}}$$

media quadratica ponderata, con pesi  $\frac{1}{f^2(x_i)} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}$ .

$$C) \quad \sum_{i=0}^n \left\{ \frac{f(x_i)}{y_i} - 1 \right\} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j} = 0; \quad \frac{\sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{y_i} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}}{\sum_{i=0}^n \frac{1}{y_i} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}} = \frac{\sum_{i=0}^n \frac{y_i}{y_i} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}}{\sum_{i=0}^n \frac{1}{y_i} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}}$$

media aritmetica ponderata, con pesi  $\frac{1}{y_i} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}$ .

D) Denotati i seguenti rapporti incrementali osservati e calcolati:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \rho(y_i); \quad \frac{f'(x_{i+1}) - f'(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \rho(f'_i)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \rho(y_i) - \rho(f'_i) \right\} \frac{\partial \rho(f'_i)}{\partial a_j} = 0; \quad \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \rho(y_i) \frac{\partial \rho(f'_i)}{\partial a_j}}{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial \rho(f'_i)}{\partial a_j}} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \rho(f'_i) \frac{\partial \rho(f'_i)}{\partial a_j}}{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial \rho(f'_i)}{\partial a_j}}$$

media aritmetica ponderata dei rapporti incrementali, con pesi  $\frac{\partial \rho(f'_i)}{\partial a_j}$ .

$$E) \quad \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \rho(y_i) - f''(x_i) \right\} \frac{\partial f''(x_i)}{\partial a_j}; \quad \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \rho(y_i) \frac{\partial f''(x_i)}{\partial a_j}}{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial f''(x_i)}{\partial a_j}} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} f''(x_i) \frac{\partial f''(x_i)}{\partial a_j}}{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial f''(x_i)}{\partial a_j}}$$

medie aritmetiche ponderate dei rapporti incrementati e delle derivate, con pesi  $\frac{\partial f''(x_i)}{\partial a_j}$ .

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \frac{\rho(y_i)}{y_i} - \frac{f''(x_i)}{f'(x_i)} \right\} \frac{\partial}{\partial a_j} \frac{f''(x_i)}{f'(x_i)} = 0$$

$$F) \quad \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\rho(y_i)}{y_i} \frac{\partial}{\partial a_j} \frac{f''(x_i)}{f'(x_i)}}{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial}{\partial a_j} \frac{f''(x_i)}{f'(x_i)}} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{f''(x_i)}{f'(x_i)} \frac{\partial}{\partial a_j} \frac{f''(x_i)}{f'(x_i)}}{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial}{\partial a_j} \frac{f''(x_i)}{f'(x_i)}}$$

medie aritmetiche ponderate dei rapporti incrementali dei valori osservati, per unità di questi valori, e dei corrispondenti valori delle derivate dei logaritmi della  $f'(x)$ , con pesi  $\frac{\partial}{\partial a_j} \frac{f''(x_i)}{f'(x_i)}$ .

$$G) \quad \sum_{i=0}^n \left\{ \frac{y_i}{f(x_i)} - \lambda \right\} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j} = 0; \quad \frac{\sum_{i=0}^n \frac{y_i}{f(x_i)} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}}{\sum_{i=0}^n \frac{1}{f(x_i)} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}} = \frac{\sum_{i=0}^n \frac{\lambda f(x_i)}{f(x_i)} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}}{\sum_{i=0}^n \frac{1}{f(x_i)} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}}$$

medie aritmetiche ponderate dei valori osservati e dei calcolati moltiplicati per il parametro  $\lambda$ , con pesi  $\frac{1}{f(x_i)} \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}$ .

$$H) \quad \sum_{i=0}^n y_i x_i^j = \sum_{i=0}^n f(x_i) x_i^j; \quad \frac{\sum_{i=0}^n y_i x_i^j}{\sum_{i=0}^n x_i^j} = \frac{\sum_{i=0}^n f(x_i) x_i^j}{\sum_{i=0}^n x_i^j}$$

medie aritmetiche ponderate, con pesi  $x_i^j$ .

$$I) \quad \sum_{i=h}^k y_i = \sum_{i=h}^k f(x_i); \quad \frac{\sum_{i=h}^k y_i}{k-h+1} = \frac{\sum_{i=h}^k f(x_i)}{k-h+1}$$

medie aritmetiche semplici

$$L) \quad \sum_{i=0}^n \Delta^j y_i = \sum_{i=1}^n \Delta^j f(x_i); \quad \frac{\sum_{i=0}^n \Delta^j y_i}{n} = \frac{\sum_{i=0}^n \Delta^j f(x_i)}{n}$$

medie aritmetiche delle  $j$ (esime) differenze. <sup>(1)</sup>

3. PROPRIETÀ DI ALTRE MEDIE DERIVANTI DALL'INTERPOLAZIONE. — Alcune relazioni fra somme di valori osservati, calcolati, e di corrispondenti scarti, sinora note soltanto per i più usati metodi, ed in modo speciale per quello dei minimi quadrati (A) possono venire pure tradotte in relazioni fra medie distinte dalle precedenti, compiute da

<sup>(1)</sup> Le varianti al metodo delle differenze (vedi nota 10, pag. 324), le quali tendono a limitare a soli gruppi parziali delle  $n$  differenze le eguaglianze sopra indicate, richiederanno di attribuire il peso 1 alle differenze di quei gruppi, e 0 alle rimanenti.

nuove relazioni simili, ed estese ad un maggior numero di metodi ed a più generiche forme di interpolanti.

A questo scopo si considerino quei metodi, come A, D, E, F che presentano equazioni del tipo:

$$[1] \quad \sum_{i=0}^n \varphi(y_i) \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j} = \sum_{i=0}^n \psi(f_i) \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}$$

ove  $\varphi$  e  $\psi$  denotano funzioni distinte per i metodi E, F, ed uguali per A, D. Si supponga, inoltre, che la  $f(x)$  sia funzione omogenea d'ordine  $m$  nei parametri  $a_j$ . È il caso, per  $m=1$ , delle funzioni razionali ed intere rispetto alla variabile  $x$ .

Se si moltiplicano i membri del sistema di  $h$  equazioni, delle quali la precedente è la  $j$ (esima), per i rispettivi parametri, e poi si sommano le equazioni stesse, si ottiene:

$$\sum_{j=0}^h \left\{ a_j \sum_{i=0}^n \varphi(y_i) \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j} \right\} = \sum_{j=0}^h \left\{ a_j \sum_{i=0}^n \psi(f_i) \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j} \right\}$$

ossia:

$$\sum_{i=0}^n \left\{ \varphi(y_i) \sum_{j=1}^h a_j \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j} \right\} = \sum_{i=0}^n \left\{ \psi(f_i) \sum_{j=1}^h a_j \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j} \right\}$$

Ma, per una proprietà fondamentale delle funzioni omogenee, le somme interne di  $h$  termini sono uguali a  $h f(x_i)$ ; di modo che la formula precedente si riduce alla:

$$\sum_{i=0}^n \varphi(y_i) f(x_i) = \sum_{i=0}^n \psi(f_i) f(x_i)$$

e dimostra che nell'uguaglianza fra medie ponderate, dalla quale la [1] ha tratto origine, è possibile la sostituzione dei pesi  $f(x_i)$  ai  $\frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}$ .

Nel caso A, essendo  $\varphi(y_i)=y_i$ ,  $\psi(f_i)=f(x_i)$ , la relazione precedente diviene:

$$\sum_{i=0}^n y_i f(x_i) = \sum_{i=0}^n f^2(x_i)$$

ed esprime che:

« Se si interpola con una funzione omogenea rispetto ai parametri, seguendo il metodo dei minimi quadrati, la media quadratica dei valori

calcolati uguaglia la radice quadrata della media aritmetica dei valori stessi, moltiplicati per i corrispondenti valori osservati ».

Ne segue, sempre nelle premesse ipotesi, ed indicando con  $\varepsilon_i$  l' $i$ (esimo) degli scarti fra valori osservati e calcolati, che è:

$$\sum_{i=0}^n \varepsilon_i f(x_i) = 0$$

Inoltre, per la minima somma dei quadrati degli scarti stessi, dalla precedente si deducono le altre relazioni:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \varepsilon_i^2 &= \sum_{i=0}^n \left\{ \varepsilon_i y_i - \varepsilon_i f(x_i) \right\} = \sum_{i=0}^n \varepsilon_i y_i = \\ &= \sum_{i=0}^n \left\{ y_i^2 - 2y_i + f^2(x_i) \right\} = \sum_{i=0}^n y_i^2 - \sum_{i=0}^n f^2(x_i) \end{aligned}$$

esprimenti semplici proprietà riguardanti il metodo dei minimi quadrati, in parte noti, ma solo per il caso di una interpolante  $f(x)$  razionale ed intera.

Si vede la possibilità di analoghe deduzioni, per gli altri metodi.

4. INTERPOLAZIONI E MEDIE RIFERITE A FUNZIONI. — Se, nei procedimenti sin qui seguiti, si inserisce il criterio di distinguere le varie medie, come relative a diverse funzioni dei dati, si aprono le nuove vie:

di estendere notevolmente e con fine logico, la già ricca disponibilità di metodi interpolatori;

di far rientrare le medie delle funzioni  $\varphi, \psi$ , dianzi considerate, nell'ambito di medie dirette dei dati;

di ridurre anche le medie dei valori calcolati a medie degli argomenti  $x_i$ .

Così facendo, però, le solite equazioni perderanno talvolta il carattere di uguagliare medie del medesimo tipo, perchè quelle dell'un membro potranno essere riferite a funzioni differenti da quelle relative alle medie dell'altro membro.

Si consideri, ad esempio, l'uguaglianza fra medie dedotta per il metodo (A) dei minimi quadrati (n. 1).



Al primo membro trovasi la media  $m_y$  dei valori osservati, relativa alla loro funzione

$$\sum_{i=0}^n y_i \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}$$

perchè detta media soddisfa alla condizione:

$$\sum_{i=0}^n m_y \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j} = \sum_{i=0}^n y_i \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}$$

Se all'analogia funzione:

$$\sum_{i=0}^n f(x_i) \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}$$

si riferisse la media  $m_f$  espressa dal secondo membro, questo non verificherebbe la condizione:

$$\sum_{i=0}^n f(x_i) \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j} = \sum_{i=0}^n m_f \frac{\partial m_f}{\partial a_j} = (n+1) m_f \frac{\partial m_f}{\partial a_j}$$

poichè da questa verrebbe determinata un espressione di  $m_f$  ben diversa da detto membro.

Si è, invece, costretti a considerare quest'ultimo come media degli  $f(x_i)$  rispetto alla loro funzione:

$$\frac{\sum_{i=0}^n f(x_i) \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}}{\sum_{i=0}^n \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}}$$

vale a dire alla media stessa, essendo verificata la condizione:

$$\frac{\sum_{i=0}^n f(x_i) \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}}{\sum_{i=0}^n \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}} = \frac{\sum_{i=0}^n m_f \frac{\partial m_f}{\partial a_j}}{\sum_{i=0}^n \frac{\partial m_f}{\partial a_j}}$$

perchè entrambi questi rapporti uguagliano  $m_f$ .

Lo stesso secondo membro, quale media  $m_x$  degli argomenti  $x_i$ , va riferita alla funzione di questi.

$$\bar{f}(m_f)$$

ove con  $\bar{f}(y)$  si denoti la funzione inversa alla  $y=f(x)$ .

È infatti:

$$\begin{aligned} m_x = \bar{f}(m_f) &= \bar{f} \left( \frac{\sum_{i=0}^n f(x_i) \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}}{\sum_{i=0}^n \frac{\partial f(x_i)}{\partial a_j}} \right) = \bar{f} \left( \frac{\sum_{i=0}^n f(m_x) \frac{\partial f(m_x)}{\partial a_j}}{\sum_{i=0}^n \frac{\partial f(m_x)}{\partial a_j}} \right) = \\ &= \bar{f} \left( \frac{(n+1) f(m_x) \frac{\partial f(m_x)}{\partial a_j}}{(n+1) \frac{\partial f(m_x)}{\partial a_j}} \right) = \bar{f} \{ f(m_x) \} = m_x \end{aligned}$$

Similmente, e sotto forma ancor meno semplice, si presentano le funzioni di riferimento delle medie per i successivi sei metodi. Solo per i diretti, come è facile verificare, esiste un'unica funzione relativa tanto alla  $m_y$  come alla  $m_f$ .

All'infuori di questi casi più semplici, si vede che il valido criterio delle medie relative a funzioni trova in questo campo un terreno poco praticabile, specialmente per quanto concerne le medie dei valori calcolati, i quali, anzichè presentarsi come valori effettivamente noti, sono funzioni dei parametri.

È inoltre singolare il fatto che, nell'esempio svolto, il riferimento della media abbia dovuto ricadere su la media stessa; ciò che del resto non può sorprendere, poichè essa si presenta effettivamente come funzione dei dati, con carattere invariante per una sua sostituzione ai dati stessi.

Rimane, ciò non ostante, la fiducia che da quel criterio possano derivare utili servigi anche in questo campo. Non ultimo potrà essere quello di ottenere tali semplificazioni dei calcoli, da concedere una maggiore libertà nella scelta della interpolante. Così, se verranno impiegate medie rispetto a funzioni tali da consentire la presenza di un solo parametro nelle medie stesse, sarà evitato l'uso delle complesse formule risolutive dei sistemi di equazioni, siano pure lineari, e quindi anche la conseguente limitazione nel numero dei parametri.