

UNA CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PERCHÈ UNA SERIE DI POTENZE ABBIA SULLA CIRCONFERENZA DI CONVERGENZA UN SOLO POLO MULTIPLO^(*)

FRANCO PELLEGRINO

SUMMARIVM. — Exponit auctor quae condicio requiratur et sufficiat ut ex coefficientibus alicuius potentiarum seriei dignosci possit quandonam haec series unum polum cuiuslibet multiplicitatis h in circumferentia convergentiae habeat; si $h=1$, condicio iam nota est.

1. — Com'è ben noto in un lavoro sulle serie di potenze⁽¹⁾ è enunciata la seguente proposizione:

Se la sola singolarità situata sul circolo di convergenza è un polo, semplice o multiplo, questo è dato dal limite del rapporto $\frac{a_n}{a_{n+1}}$.

E si dice in seguito che, se per esempio la serie

$$[1] \quad f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$$

convergente entro il circolo di raggio ρ ammette come unica singolarità sulla circonferenza il polo semplice $z=\alpha$, non solo il rapporto $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ tende verso α , ma ciò avviene in maniera che la differenza, a partire

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Francesco Severi, nella Tornata del 20 febbraio 1942.

(1) J. HADAMARD, *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*. « Journal de Math. » (4^e série), tome VIII, fasc. II, 1892.

da un certo indice in poi, sia in modulo inferiore a k^n , k indicando un numero positivo conveniente < 1 , cioè in modo che sia

$$[2] \quad \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} - \alpha \right| < k^n$$

Si dimostra poi che questa è condizione anche sufficiente per concludere che la [1] ammette un solo polo semplice sulla circonferenza del circolo di convergenza.

Scopo di questa nota è di generalizzare quanto sopra, trovando una condizione necessaria e sufficiente perchè, sulla circonferenza del cerchio di convergenza, vi sia un solo polo d'ordine h qualunque.

2. - Riprendiamo le formule⁽¹⁾ che nel lavoro citato, sono indicate come punto di partenza per la dimostrazione della proposizione ricordata all'inizio.

Per esse, nel caso che sulla circonferenza di convergenza di raggio R , vi sia un solo polo, d'ordine $h > 1$, posto

$$[3] \quad f(z) = \frac{A_0}{(\alpha - z)^h} + \frac{A_1}{(\alpha - z)^{h-1}} + \dots + \frac{A_{h-1}}{\alpha - z} + \varphi(z)$$

con $\varphi(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n + \dots$ serie convergente in un circolo di raggio ρ più grande di R , si ha

$$a_n \alpha^n = \frac{A_0}{\alpha^h} (n+1)(n+2) \times \dots \times (n+h-1) + \\ + \frac{A_1}{\alpha^{h+1}} (n+1) \times \dots \times (n+h-2) + \dots + \frac{A_{h-1}}{\alpha} + b_n \alpha^n$$

⁽¹⁾ G. DARBOUX, *Mémoire sur l'approximation des fonctions de très-grands nombres, etc.* « Journal de Math. », 1878, pag. 15.

con $\lim_{n \rightarrow \infty} (\rho - k)^n b_n = 0$, $\rho - k$ indicando un numero minore di ρ
ma superiore ad R , e quindi:

$$[4] \quad b_n = \frac{\varepsilon_n}{(\rho - k)^n}$$

ε_n tenendo verso zero con $\frac{1}{n}$, da cui

$$[5] \quad a_n = A_0 \frac{(n+1)(n+2) \times \dots \times (n+h-1)}{\alpha^{n+h}} + A_1 \frac{(n+1)(n+2) \times \dots \times (n+h-2)}{\alpha^{n+h-1}} + \dots +$$

$$+ A_{h-1} \frac{1}{\alpha^{n+1}} + \frac{\varepsilon_n}{(\rho - k)^n}$$

e

$$a_{n+1} = A_0 \frac{(n+2)(n+3) \times \dots \times (n+h)}{\alpha^{n+1+h}} + A_1 \frac{(n+2)(n+3) \dots (n+h-1)}{\alpha^{n+h}} + \dots +$$

$$+ A_{h-1} \frac{1}{\alpha^{n+2}} + \frac{\varepsilon_{n+1}}{(\rho - k)^{n+1}}. \text{ Allora è}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha \frac{A_0(n+1) \times \dots \times (n+h-1) + \alpha A_1(n+1) \times \dots \times (n+h-2) + \dots + \alpha^{h-2} A_{h-2}(n+1) + \alpha^{h-1} A_{h-1} + \alpha^{n+h} \frac{\varepsilon_n}{(\rho - k)^n}}{A_0(n+2) \times \dots \times (n+h) + \alpha A_1(n+2) \times \dots \times (n+h-1) + \dots + \alpha^{h-2} A_{h-2}(n+2) + \alpha^{h-1} A_{h-1} + \alpha^{n+h+1} \frac{\varepsilon_{n+1}}{(\rho - k)^{n+1}}}$$

Dividendo numeratore e denominatore per $(n+2) \times \dots \times (n+h)$, si ha

$$[6] \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{n+1}{A_0 + \alpha A_1} \frac{n+1}{(n+h-1)(n+h)} + \dots + \alpha^{h-2} \frac{n+1}{A_{h-2}} \frac{n+1}{(n+2) \times \dots \times (n+h)} + \alpha^{h-1} \frac{n+1}{A_{h-1}} \frac{n+1}{(n+2) \times \dots \times (n+h)} + \alpha^{n+h} \frac{\varepsilon_n}{(\rho-k)^n} \times \frac{1}{(n+2) \times \dots \times (n+h)}}{\frac{1}{A_0 + \alpha A_1} \frac{1}{n+h} + \dots + \alpha^{h-2} \frac{1}{A_{h-2}} \frac{1}{(n+3) \times \dots \times (n+h)} + \alpha^{h-1} \frac{1}{A_{h-1}} \frac{1}{(n+2) \times \dots \times (n+h)} + \alpha^{n+h+1} \frac{\varepsilon_{n+1}}{(\rho-k)^{n+1}} \times \frac{1}{(n+2) \times \dots \times (n+h)}}$$

da cui

$$[7] \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} - \alpha = \alpha \frac{\frac{1-h}{A_0 + \alpha A_1} \frac{2-h}{(n+h)(n+h-1)} + \dots + \alpha^{h-2} \frac{2-h}{A_{h-2}} \frac{2-h}{(n+3) \times \dots \times (n+h)} + \alpha^{h-1} \frac{(h-1)-h}{A_{h-1}} \frac{(h-1)-h}{(n+2) \times \dots \times (n+h)} + \alpha^{n+h} \frac{1}{(\rho-k)^n} \times \frac{1}{(n+2) \times \dots \times (n+h)} \left[\frac{\varepsilon_n}{\rho-k} - \frac{\varepsilon_{n+1}}{\rho-k} \right]}{\frac{1}{A_0 + \alpha A_1} \frac{1}{n+h} + \dots + \alpha^{h-2} \frac{1}{A_{h-2}} \frac{1}{(n+3) \times \dots \times (n+h)} + \alpha^{h-1} \frac{1}{A_{h-1}} \frac{1}{(n+2) \times \dots \times (n+h)} + \alpha^{n+h+1} \frac{\varepsilon_{n+1}}{(\rho-k)^{n+1}} \times \frac{1}{(n+2) \times \dots \times (n+h)}}$$

Intanto, segue subito dalla [6] la proposizione ricordata all'inizio, poichè, per $n \rightarrow \infty$ il secondo membro tende evidentemente ad α .

Segue anche che gli a_n dovranno allora essere tutti diversi da zero da un certo punto in poi, e si ha quindi immediatamente una parte d'un noto teorema sulla serie di potenze lacunari⁽¹⁾, e cioè che: « Se uno sviluppo di TAYLOR ha lacune, la funzione da esso rappresentata non può avere sulla circonferenza di convergenza dello sviluppo in questione un solo polo ».

Questa proposizione merita d'essere rilevata, perchè associa la presenza in uno sviluppo di TAYLOR di lacune di *qualsiasi* tipo, alle singolarità della funzione rappresentata da tale sviluppo.

Di più si ha dalla [7] che, per $n \rightarrow \infty$, il denominatore tende ad $A_0 \neq 0$, mentre nel numeratore il primo termine è infinitesimo del primo ordine. Ma gli altri termini sono tutti infinitesimi d'ordine superiore al primo, quindi tutto il primo membro della [7] è infinitesimo come $\frac{1}{n}$ per $n \rightarrow \infty$, e per il quoziente di questi due infinitesimi avremo anzi, al limite,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n}{a_{n+1}} - \alpha}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - \alpha \right) = 1 - h$$

Dunque possiamo intanto concludere che, se sulla circonferenza di convergenza si ha una sola singolarità, consistente in un polo multiplo d'ordine $h > 1$, è necessario che la differenza $\frac{a_n}{a_{n+1}} - \alpha$ sia infinitesima del prim'ordine per $n \rightarrow \infty$ e che il limite

$$[8] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - \alpha \right) = 1 - h$$

sia un intero negativo.

Notiamo subito che in questo caso tale limite cambiato di segno e aumentato di 1 dà l'ordine del polo.

⁽¹⁾ MANDELBROJT, *Sur les séries de Taylor qui présentent des lacunes*. « Annales Ecole Normale Supérieure » (3), 40.

3. - Perchè poi sulla circonferenza di convergenza di raggio ρ d'uno sviluppo $\sum a_n z^n$ la funzione $f(z)$ da esso rappresentata abbia un solo polo multiplo α ($|\alpha| = \rho$) d'ordine h è evidentemente necessario e sufficiente che, moltiplicando tale sviluppo per $\left(1 - \frac{z}{\alpha}\right)^h$, la nuova serie così ottenuta converga in un circolo di raggio $\rho' > \rho$. Il nuovo coefficiente b_n di z^n , in tale secondo sviluppo, viene dato dall'espressione

$$[9] \quad b_n = a_n - h a_{n-1} \frac{1}{\alpha} + \binom{h}{2} a_{n-2} \frac{1}{\alpha^2} - \dots + (-1)^h \binom{h}{h} a_{n-h} \frac{1}{\alpha^h}.$$

Sarà allora necessario e sufficiente, per l'esistenza del solo polo multiplo, che

$$[10] \quad \begin{aligned} & \text{Max} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sqrt[n]{b_n} \right| = \\ & = \text{Max} \lim \left| \sqrt[n]{a_n - h a_{n-1} \frac{1}{\alpha} + \binom{h}{2} a_{n-2} \frac{1}{\alpha^2} - \dots + (-1)^h \binom{h}{h} a_{n-h} \frac{1}{\alpha^h}} \right| = \frac{1}{\rho^1} < \frac{1}{\rho}. \end{aligned}$$

Supponiamo ora che la $f(z)$, rappresentata dallo sviluppo $\sum a_n z^n$, abbia appunto sulla sua circonferenza di convergenza di raggio ρ un solo polo multiplo α . Allora si sa dalla memoria citata in ⁽³⁾ al principio di questo lavoro, che la successione dei rapporti $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ è regolare e converge ad α . Sarà allora regolare $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ e, per conseguenza $\left| \sqrt[n]{a_n} \right|$, che convergerà a $\frac{1}{|\alpha|} = \frac{1}{\rho}$,
cioè

$$[11] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sqrt[n]{a_n} \right| = \frac{1}{\rho}$$

Scritta la relazione

$$\left| \sqrt[n]{b_n} \right| = \left| \sqrt[n]{a_n - h a_{n-1} \frac{1}{\alpha} + \binom{h}{2} a_{n-2} \frac{1}{\alpha^2} - \dots + (-1)^h \binom{h}{h} a_{n-h} \frac{1}{\alpha^h}} \right|$$

sotto la forma:

$$[12] \quad \left| \sqrt[n]{b_n} \right| = \left| \sqrt[n]{a_n} \right| \left| \sqrt{1 - h \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{\alpha} + \binom{h}{2} \frac{a_{n-2}}{a_n} \frac{1}{\alpha^2} - \dots + (-1)^h \binom{h}{h} \frac{a_{n-h}}{a_n} \frac{1}{\alpha^h}} \right|$$

prendiamo poi due numeri positivi M ed M' tali che

$$[13] \quad \frac{1}{\rho^4} < M < M' < \frac{1}{\rho};$$

per la [10], da un certo indice in poi, è certo

$$\left| \sqrt[n]{b_n} \right| < M \text{ cioè:}$$

$$[14] \quad \left| \sqrt[n]{a_n} \right| \left| \sqrt{1 - h \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{\alpha} + \binom{h}{2} \frac{a_{n-2}}{a_n} \frac{1}{\alpha^2} - \dots + (-1)^h \binom{h}{h} \frac{a_{n-h}}{a_n} \frac{1}{\alpha^h}} \right| < M$$

cioè ancora, da un opportuno indice v in poi, a causa delle [11] e [13]

$$[15] \quad \left| \sqrt{1 - h \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{\alpha} + \binom{h}{2} \frac{a_{n-2}}{a_n} \frac{1}{\alpha^2} - \dots + (-1)^h \frac{a_{n-h}}{a_n} \frac{1}{\alpha^h}} \right| < \frac{M}{\left| \sqrt[n]{a_n} \right|} < \frac{M}{M'} = k < 1$$

e infine, per ogni $n > v$,

$$[16] \quad \left| 1 - \binom{h}{1} \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{\alpha} - \dots + (-1)^h \binom{h}{h} \frac{a_{n-h}}{a_n} \frac{1}{\alpha^h} \right| < k^n$$

dove k è come si è visto, un opportuno numero positivo minore di 1. Concludiamo allora che:

Per l'esistenza sulla circonferenza di convergenza d'un solo polo multiplo d'ordine h , è necessario che esista il limite:

$$[17] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha$$

che dà la posizione del polo e , determinato questo, è necessario che, da un certo indice in poi, sia sempre per k numero positivo opportuno < 1 :

$$[18] \quad \left| 1 - \binom{h}{1} \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{\alpha} - \dots + (-1)^h \binom{h}{h} \frac{a_{n-h}}{a_n} \cdot \frac{1}{\alpha^h} \right| < k^n$$

4. - Supponiamo viceversa che siano verificate le [17] e [18]. Dalla [17] segue allora che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sqrt[n]{a_n} \right| = \frac{1}{|\alpha|} = \frac{1}{\rho} \quad \text{cioè} \quad \left| \sqrt[n]{a_n} \right| \rightarrow 1$$

Preso ora un numero k' positivo, maggiore di 1 ma minore di $\frac{1}{k}$, cioè tale che $1 < k' < \frac{1}{k}$ e quindi $kk' < 1$, da un certo indice in poi sarà

$$[19] \quad \left| \sqrt[n]{a_n} \right| < k' \quad \text{o anche} \quad \left| \sqrt[n]{a_n} \right| < \frac{k'}{\rho};$$

ma per la [18] si ha, da v in poi,

$$\left| \sqrt[n]{1 - \binom{h}{1} \frac{a_{n-1}}{a_n} + \dots + (-1)^h \frac{a_{n-h}}{a_n} \cdot \frac{1}{\alpha^h}} \right| < k$$

e quindi, tenendo presente la [19], si ha

$$\left| \sqrt[n]{a_n} \right| \left| \sqrt[n]{1 - \binom{h}{1} \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{\alpha} - \dots + (-1)^h \frac{a_{n-h}}{a_n} \cdot \frac{1}{\alpha^h}} \right| = \left| \sqrt[n]{b_n} \right| < \frac{kk'}{\rho} < \frac{1}{\rho}$$

da un certo indice $v' \geq v$ in poi, segue allora

$$\text{Max} \lim \left| \sqrt[n]{b_n} \right| < \frac{1}{\rho}$$

il che ci dice che le condizioni [17] e [18] sono non solo necessarie, ma anche sufficienti per l'esistenza di un solo polo multiplo d'ordine h sulla circonferenza di convergenza.

5. - Volendo far vedere come le condizioni da noi trovate, si riducono per $h=1$, a quella ricordata al principio del presente lavoro, scriviamo la [18] ponendovi $n+h$ al posto di n e moltiplichiamone ambo i membri per $|\alpha|^h$, avremo allora

$$[20] \quad \left| \alpha^h - \binom{h}{1} \frac{a_{n+h-1}}{a_{n+h}} \alpha^{h-1} - \dots + (-1)^h \binom{h}{h} \frac{a_n}{a_{n+h}} \right| < k^{n+h} \rho^h = k^n (\rho k)^n.$$

e quindi si potrà trovare un $k_1 < 1$ tale che a partire da un certo indice in poi sia sempre:

$$\left| \sqrt[n]{\alpha^h - \binom{h}{1} \frac{a_{n+h-1}}{a_{n+h}} \alpha^{h-1} - \dots + (-1)^h \binom{h}{h} \frac{a_n}{a_{n+h}}} \right| < k \sqrt[n]{(\rho k)^h} < k_1 < 1$$

cioè

$$[21] \quad \left| \alpha^h - \binom{h}{1} \frac{a_{n+h-1}}{a_{n+h}} \alpha^{h-1} - \dots + (-1)^h \binom{h}{h} \frac{a_n}{a_{n+h}} \right| < k_1^n$$

e quindi

$$[22] \quad \left| \alpha - \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| < k_1^n$$

che è la condizione ⁽²⁾.