

SULLA VELOCITÀ DI LAVORAZIONE NELL'ESTRAZIONE DI SOSTANZE MEDIANTE SOLVENTE (*)

PIETRO TEOFILATO

SYMMARIUM. — Auctor ostendit viam quamdam analytico-geometricam, qua perpendi potest quamam velocitate utiles materiae, solventibus adhibitis, e certis communioribus mineralibus extrahi possint.

1. — Allorchè si tratta di estrarre da minerali largamente diffusi un dato materiale utile, mediante l'azione di un solvente, si presenta, come elemento indispensabile, la preventiva conoscenza della velocità di lavorazione.

Poichè, in un caso, ho avuto incarico di occuparmi della questione, ritengo opportuno dar conto nella presente nota del contributo da me dato a riguardo.

Detta velocità dipende evidentemente dal metodo che viene impiegato: si può difatti adottare una lavorazione per gradi (discontinua) la quale si svolge trattenendo in agitazione, per ciascun grado, minerale, preventivamente sempre più depauperato, con solvente preventivamente sempre più arricchito, fino a quando non sia raggiunto (o quasi) l'equilibrio di soluzione; e si può invece eseguire una lavorazione continua, facendo cadere una pioggia continua di pezzi di minerale in una colonna nella quale il solvente entra puro dalla base inferiore, per sboccare dall'alto, arricchito della sostanza utile, a spese del minerale che lo ha attraversato.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Giuseppe Armellini, nella Tornata del 20 febbraio 1942.

2. — Incominciamo dal primo metodo. Sia w_0 il volume di minerale grezzo, ossia prima di qualunque trattamento con solvente, il quale corrisponda al peso di un chilogrammo. Detto volume è facilmente determinabile e noi lo ammetteremo conosciuto, come pure ammetteremo conosciuto, mediante analisi preventiva, il tasso r_0 in sostanza utile contenuta in un chilogramma di minerale grezzo, e noti inoltre i pesi specifici p_u della sostanza utile e p_L del solvente.

Sarà:

$$r_0 : p_u = v_0$$

il volume dei meati occupati (in media) dalla sostanza utile entro un chilogramma di minerale grezzo.

Faremo l'ulteriore ipotesi che i volumi w_0, v_0 rimangano inalterati durante il trattamento.

Detto poi p_s il peso specifico di una soluzione (solvente più sostanza utile) al titolo s , avremo:

$$\frac{1}{p_s} = \frac{s}{p_u} + \frac{1-s}{p_L},$$

la quale, quando si ponga:

$$[1] \quad \sigma = \frac{1}{p_u} - \frac{1}{p_L}, \quad \tau = \frac{1}{p_L},$$

diventa:

$$[2] \quad \frac{1}{p_s} = \sigma s + \tau.$$

Si consideri la quantità di minerale già trattato che proviene precisamente dalla lavorazione di R_0 chilogrammi iniziali di materiale grezzo e sia s' il titolo della soluzione che riempie i meati. Si mescoli ora questa quantità di minerale già trattato con S'' chilogrammi di soluzione al titolo s'' ; si può allora facilmente determinare il tasso s della soluzione finale, ad equilibrio stabilito. Infatti, sarà $v_0 p_{s'}$, il peso

della soluzione contenuta nei meati di volume v_0 e $v_0 p_{s'} s'$ il peso di sostanza utile ivi disciolta.

Avremo allora

$$[3] \quad s = \frac{R_0 v_0 p_{s'} s' + S'' s''}{R_0 v_0 p_{s'} + S''}.$$

Se gli S'' Kg. di soluzione provengono da S_0 Kg. di solvente puro, man mano arricchitosi, e non vi sono perdite di liquido, il volume iniziale di solvente, cioè $S_0 : p_L$, deve essere eguale al volume degli S'' Kg., in quanto che, per ogni elemento di volume di soluzione più povera che si infila nei meati, altrettanto volume di soluzione più ricca ne esce.

Avremo quindi:

$$S_0 : p_L = S'' : p_{s''},$$

ovvero:

$$S'' = \frac{S_0}{p_L} \cdot p_{s''}$$

per modo che la [3] diventa:

$$s = \frac{R_0 v_0 p_{s'} s' + \frac{S_0}{p_L} p_{s''} s''}{R_0 v_0 p_{s'} + \frac{S_0}{p_L} p_{s''}}$$

e per la [2]:

$$[4] \quad s = \frac{R_0 v_0 \frac{s'}{\sigma s' + \tau} + \frac{S_0}{p_L} \frac{s''}{\sigma s'' + \tau}}{R_0 v_0 \frac{1}{\sigma s' + \tau} + \frac{S_0}{p_L} \frac{1}{\sigma s'' + \tau}}$$

3. - Consideriamo ora una colonna cilindrica di base Ω , divisa in tanti scompartimenti eguali che indicheremo con $G_1, G_2 \dots G_n$, procedendo dall'alto verso il basso. Nel gradino G_k cadrà il minerale che proviene dal trattamento degli R_0 Kg. di minerale grezzo attra-

verso i soprastanti gradini $G_1 G_2 \dots G_{k-1}$. Contemporaneamente in G_k ascenderà la soluzione proveniente dal sottostante gradino G_{k+1} e sia s_k il titolo della soluzione che si trova in G_k , ad equilibrio raggiunto. Nel primo gradino sarà $s_1 = 1 - \varepsilon$; nell'ultimo sarà $s_n = \eta$ dove ε ed η sono quantità positive minori dell'unità e *prefissate*, perchè s_1 è il titolo stabilito per la soluzione che dopo aver asportato la sostanza utile, sbocca in alto, oltre G_1 ed s_n è il titolo ammesso per la tolleranza del minerale eliminato alla uscita dello sbocco inferiore di G_n .

Dovremo sostituire allora nella [3] i titoli come segue:

$$s' = s_{k-1}, \quad s = s_k, \quad s'' = s_{k+1};$$

e porremo:

$$\frac{S_0}{R_0 v_0 p_L} = q;$$

e allora dalla [4] dedurremo l'equazione ricorrente:

$$[5] \quad s_{k+1} = \frac{\tau s_{k-1} - (\tau(1+q) + \sigma q s_{k-1}) s_k}{-(\tau q + \sigma(1+q) s_{k-1}) + \sigma s_k}$$

Da questa, assunti come valori di partenza: $s_0 = 1$ (titolo dei meati appena si versa il minerale nella colonna) ed $s_1 = 1 - \varepsilon$ si ricava, per un valore di q prefissato, qual'è il valore di s_m che più si approssima al valore η e si avrà così il numero dei gradini occorrenti alla lavorazione. Se il numero dei gradini è eccessivo occorrerà modificare q e ripetere il calcolo.

Il volume di ogni gradino sarà:

$$R_0 w_0 + \frac{S_0}{p_L}$$

e la sua altezza Δz si otterrà dividendo la precedente somma per Ω , area della base della colonna di lavorazione.

4. - Per quanto concerne il tempo di lavorazione ammetteremo che la quantità di materiale utile asportata, per secondo, da una soluzione messa in comunicazione con un'altra soluzione, sia proporzionale alla differenza dei titoli delle due soluzioni, fino a quando non si raggiunga l'equilibrio. L'ipotesi è alquanto semplicista, ma d'altra parte bisogna osservare che la turbolenza del movimento fluido, a causa dell'agitazione che viene appositamente provocata, finisce per eliminare ogni influsso locale e direzionale nella velocità di variazione dei concentramenti e permette di presumere che la velocità di trasporto dipenda solo dagli elementi che esprimono in modo riassuntivo lo stato delle soluzioni, e cioè dai titoli di queste. Detta y la quantità di materiale asportata fino all'istante t , avremo allora:

$$\frac{dy}{dt} = G(\bar{s} - s)$$

dove \bar{s} ed s sono i titoli *attuali* delle due soluzioni e G un coefficiente di proporzionalità dipendente, oltre che dalla natura delle soluzioni, anche dal modo come viene stabilita la comunicazione fra loro.

Indicati con s' ed s'' i tassi *iniziali* e con l' l'' i pesi iniziali delle soluzioni, inoltre, supposto $s' > s''$, avremo:

$$\frac{dy}{dt} = G \left[\frac{l' s' - y}{l' - y} - \frac{l'' s'' + y}{l'' + y} \right],$$

equazione che, quando si ponga:

$$c' = 1 - s', \quad c'' = 1 - s'',$$

$$A = l' c' + l'' c'', \quad B = l''^2 c'' - l'^2 c', \quad E = l' l'' c' c'' (l' + l'')^2,$$

diventa:

$$t = \frac{1}{GA^2} \int [Ay + B + E(-Ay + l' l'' (c'' - c'))^{-1}] dy,$$

dove A e $c'' - c'$ sono entrambi positive.

I limiti dell'integrale devono estendersi da $y=0$ fino al valore di y_0 della y che corrisponde al tasso di equilibrio; ma questo valore è

appunto quello che annulla il denominatore del terzo termine della funzione integranda, cioè:

$$y_0 = \frac{1}{A} l' l'' (c'' - c'),$$

il quale rende t teoricamente infinito.

Praticamente però basta assumere come limite superiore quello che corrisponde ad un tasso il quale differisca per un centesimo del suo valore dal tasso di equilibrio per ottenere un tempo ben limitato.

Allora tenuto conto che nel k -esimo gradino è:

$$c' = 1 - s_{k-1}, \quad c'' = 1 - s_{k+1},$$

$$l' = v_0 R_0 p_{s_{k-1}}, \quad l'' = \frac{S_0}{p_r} p_{s_{k+1}},$$

possiamo scrivere:

$$t_k \approx \frac{1}{A^2 G} \left[\frac{A y_0^2}{2} + B y_0 + \frac{E}{A} \log_e 100 \right],$$

ovvero:

$$t_k = \frac{l' l''}{A^3 G} \left[\frac{1}{2} l' l'' (c'' - c')^2 + B (c'' - c) + c' c'' (l' + l'')^2 \cdot 4,61 \right],$$

mentre la velocità di estrazione della sostanza utile sarà in virtù della [1]:

$$\frac{S_0}{p_r} \frac{s_1}{\sigma s_1 + \tau} : \Sigma t_k$$

espressa in Kg. al secondo in confronto di:

$$R_0 : \Sigma t_k$$

Kg. di minerale introdotti al secondo.

5. - L'equazione ricorrente [5] dà luogo ad una equazione delle differenze finite del secondo ordine, la quale, quando il numero dei gradini sia molto grande, si può anche confondere, ma senza vantaggio, con un'equazione differenziale del secondo ordine non lineare.

Giova invece far ricorso ad una costruzione geometrica che, se in principio ha bisogno di un grafico preparatorio, permette in seguito di procedere, di gradino in gradino, alla determinazione dei titoli s_k , molto rapidamente.

Prima di tutto si disegnino due rette perpendicolari, l'una u , orizzontale, l'altra v , verticale, e si individui la proiettività π_1 , che fa corrispondere le due punteggiate, una formata dai punti della retta u con le ascisse x contate a partire da O , incrocio di u con v , l'altra formata dai punti della retta v , aventi ascissa:

$$[6] \quad y = \frac{1}{\sigma x + \tau},$$

contata sempre a partire da O , verso l'alto.

Si individui poi l'altra proiettività π_2 tra i punti y e i punti della retta v aventi ascissa:

$$[7] \quad z = -qy.$$

Si conducano poi due verticali arbitrarie c, d e siano C, D le rispettive intersezioni con la u .

Ciò fatto, vediamo come si possa procedere per ricavare s_{k+1} quando siano noti s_{k-1} ed s_k .

Tra i punti x della retta u assumiamo i punti $x = s_{k-1}$ ed $x = s_k$; e si conduca poi per s_{k-1} la verticale b . Si trovi sulla retta v il punto $y = y_1$ corrispondente di $x = s_{k-1}$ secondo la proiettività π_1 definita dalla [6], e si conduca per y_1 l'orizzontale a . Il fascio improprio delle verticali proietta la punteggiata della u in una punteggiata della a , in modo che ai punti CDE corrispondono $C'D'E'$. Il fascio di centro s_k , a sua volta, proietta la punteggiata di a sulla retta b in modo che i punti $C'D'E'_\infty$ corrisponderanno ai punti $C''D''E''$, dove E'' coincide con s_{k-1} , incrocio di b con u .

Siano $C'''D'''E'''$ i punti della v corrispondenti a CDE nel prodotto delle due proiettività π_1 , definita dalla [6], e π_2 definita dalla [7], e siano inoltre $C^{IV}D^{IV}E^{IV}$ i punti della retta b che il fascio di orizzontali fa corrispondere a $C'''D'''E'''$.

Le due punteggiate $C''D''E''$, $C^{IV}D^{IV}E^{IV}$ sono proiettive ed hanno il punto unito E'' . L'altro punto unito F'' (non disegnato) che si può trovare mediante costruzione con la sola riga, unito con s_k , darà sulla a

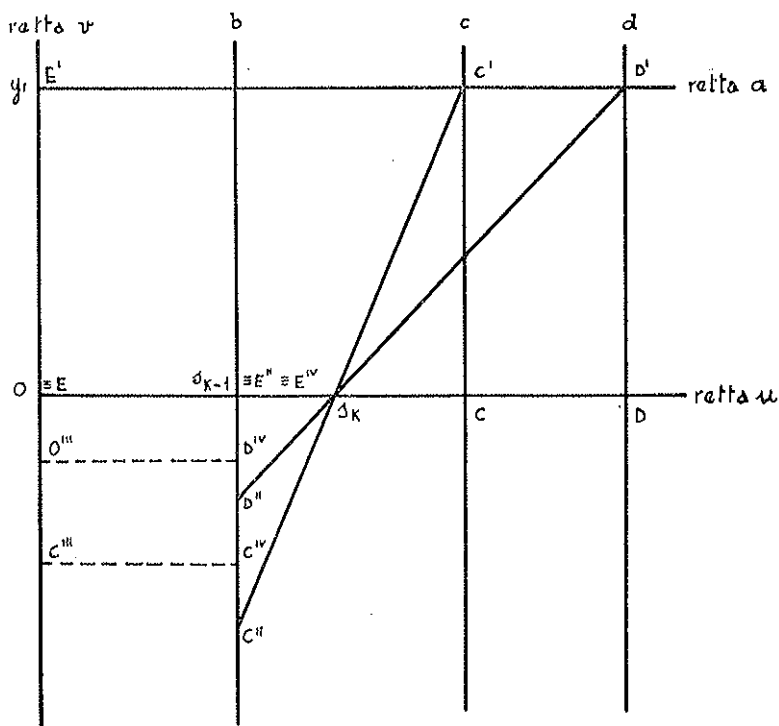


FIG. 1.

il punto F' e corrispondentemente sulla u il punto F proiezione di F' . Sarà s_{k+1} l'ascissa del punto F . Infatti l'obliqua condotta per s_k e per il secondo punto unito determina in s_k il baricentro dei due vettori verticali:

$$\frac{1}{\sigma s_{k-1} + \tau}, \quad \frac{q}{\sigma s_{k+1} + \tau},$$

pensati come applicati rispettivamente in s_{k-1} e in s_{k+1} ; precisamente a norma di quanto indica la formula [4].

Trovato così s_{k+1} si ripeterà l'operazione cercando, prima nella proiettività π_1 il punto y_1 corrispondente di $x=s_k$ ed assumendo come nuova retta a l'orizzontale condotta per il nuovo punto y_1 e come nuovi punti $C'D'$ le intersezioni di c, d con detta orizzontale, infine come nuova retta b la verticale s_k . E così via.

6. - Passiamo adesso a considerare una lavorazione continua ottenuta conferendo al liquido ascendente una velocità costante V e alle breccie di minerale che piovono dall'alto una erogazione di n breccie al secondo. Poichè si tratta di piccole velocità si può ammettere che le breccie incontrino una resistenza viscosa e quindi una velocità di caduta, in seno al liquido, quando questo fosse immobile, espressa da:

$$[8] \quad K : p_{\bar{s}}$$

dove K è una costante ed \bar{s} il titolo della soluzione. Siccome invece incontrano un liquido in movimento, la velocità di regime relativa al liquido sarà:

$$[9] \quad \bar{V} = V + \frac{K}{p_{\bar{s}(z)}}$$

avendo messo in evidenza la dipendenza del titolo \bar{s} della soluzione ascendente dalla quota z da essa raggiunta.

La [8] rappresenterà poi la velocità delle breccie rispetto alle pareti della colonna.

Incidentalmente avvertiamo che $\bar{s}(z)$ non è da confondere col titolo $s(z)$ della soluzione che riempie i meati delle breccie attraversanti quello stesso strato, durante la loro caduta.

Siano ora ΔR_0 il peso di minerale grezzo erogato al secondo in cima alla colonna di lavorazione e ΔS_0 il peso di solvente puro immerso al secondo nella base inferiore.

In regime *stazionario* il volume di liquido che sbocca dall'alto, sarà $\Delta S_0 : p_L$, come pure sarà $w_0 \cdot \Delta R_0$ il volume di minerale eliminato dalla bocca inferiore mentre, detto e il volume medio di una breccia risulterà:

$$w_0 \cdot \Delta R_0 = n e .$$

Una breccia in un tempo Δt attraversa l'altezza $\bar{V} \cdot \Delta t$ di liquido $\bar{s}(z)$, pensato in quiete, perchè \bar{V} è appunto la velocità relativa data dalla [9].

Nel tempo Δt , la breccia che ha i meati al titolo $s(z)$, cede al liquido attraversato una certa quantità di materiale utile che indicheremo con:

$$[10] \quad x \frac{v_0}{w_0} e \cdot \Delta t,$$

perchè proporzionale al volume dei meati della breccia ed al tempo.

La cessione al liquido riduce il titolo della breccia da $s(z)$ ad $s - ds$, tale che:

$$[11] \quad s - ds = \frac{\frac{v_0}{w_0} e p_s s - x \frac{v_0}{w_0} e \Delta t}{\frac{v_0}{w_0} e (p_s - dp_s)}.$$

D'altra parte, il liquido attraversato, pensato come fermo, ha il volume:

$$[12] \quad \Omega \bar{V} \cdot \Delta t - ne \cdot \Delta t,$$

perchè nel tempo Δt l'attraversano $ne \cdot \Delta t$ breccie. Esso passerà dal titolo $\bar{s}(z)$ al titolo $\bar{s} + d\bar{s}$ per il fatto che acquista da ogni breccia la quantità [10] e per tutte le breccie che l'attraversano durante quel tempo:

$$x \frac{v_0}{w_0} e \cdot \Delta t \cdot n \cdot \Delta t.$$

Segue:

$$s + d\bar{s} = \frac{(\Omega \bar{V} \Delta t - ne \Delta t) p_s \bar{s} + x \frac{v_0}{w_0} en \Delta t^2}{(\Omega \bar{V} \Delta t - ne \Delta t) (p_s + dp_s)}.$$

Si deduce:

$$[13] \quad ds = x \frac{dt}{p_s} - s \frac{dp_s}{p_s}, \quad d\bar{s} = \frac{x v_0 \Delta R_0 dt}{w_0 (\Omega \bar{V} - w_0 \Delta R_0) p_s} - \bar{s} \frac{dp_s}{p_s}.$$

Il liquido, come abbiamo detto, sale con velocità V e perciò, nel tempo dt la quota di uno strato è aumentata di dz dove:

$$[14] \quad dz = V dt,$$

equazione che ci permette di eliminare il tempo nelle equazioni differenziali [13].

Quanto ad x , che rappresenta la quantità di materiale utile asportato ad ogni unità di volume nell'unità di tempo, abbiamo ammesso al paragrafo 4, che essa sia proporzionale alla differenza fra i due titoli, cioè:

$$x = G(\bar{s} - s)$$

talchè le [13] diverranno:

$$[15] \quad ds = G \frac{\bar{s} - s}{p_s} \cdot \frac{dz}{V} - s \frac{dp_s}{p_s}$$

$$d\bar{s} = \frac{G(\bar{s} - s) v_0 \Delta R_0}{w_0(\Omega \bar{V} - w_0 \Delta R_0) p_{\bar{s}}} \cdot \frac{dz}{V} - \bar{s} \frac{dp_{\bar{s}}}{p_{\bar{s}}}.$$

Nell'ipotesi che il peso specifico della soluzione subisca variazioni così piccole da potersene trascurare l'effetto nei riguardi della resistenza, come accade quando i pesi specifici del solvente e della materia utile sono poco diversi, allora \bar{V} è costante e le ultime due equazioni, tenuto conto della [2], si possono integrare.

Le [15] possono scriversi difatti:

$$[16] \quad \frac{ds}{dz} = H(\bar{s} - s)(\sigma s + \tau) + \frac{\sigma s}{\sigma s + \tau} \cdot \frac{ds}{dz}$$

$$\frac{d\bar{s}}{dz} = \bar{H}(\bar{s} - s)(\sigma \bar{s} + \tau) + \frac{\sigma \bar{s}}{\sigma \bar{s} + \tau} \cdot \frac{d\bar{s}}{dz},$$

dove si è posto:

$$[17] \quad H = \frac{G}{V}, \quad \bar{H} = \frac{G}{V} \cdot \frac{v_0 \Delta R_0}{w_0(\Omega \bar{V} - w_0 \Delta R_0)}.$$

Ponendo ancora:

$$[18] \quad \sigma s + \tau = u^{-1}, \quad \sigma \bar{s} + \tau = \bar{u}^{-1}$$

si ottiene:

$$[19] \quad \frac{\tau}{\sigma} \frac{du}{dz} = -\frac{H}{\sigma} (\bar{u}^{-1} - u^{-1})$$

$$\frac{\tau}{\sigma} \frac{d\bar{u}}{dz} = -\frac{\bar{H}}{\sigma} (\bar{u}^{-1} - u^{-1})$$

e dividendo membro a membro:

$$\frac{d\bar{u}}{du} = \frac{\bar{H}}{H},$$

ossia:

$$[20] \quad \bar{u} = \frac{\bar{H}}{H} u + C;$$

e perciò sostituendo nella seconda delle [19]:

$$\frac{\tau}{\sigma} \frac{du}{dz} = -\frac{H}{\sigma} \left(\frac{1}{\frac{\bar{H}}{H} u + C} - \frac{1}{u} \right);$$

donde:

$$z = -\frac{\tau}{H} \int \frac{u \left(u \frac{\bar{H}}{H} + C \right)}{u \left(1 - \frac{\bar{H}}{H} \right) - C} du,$$

e finalmente:

$$[21] \quad z = -\frac{\tau}{H(H-\bar{H})} \left\{ \frac{\bar{H}}{2(\sigma s + \tau)^2} - \frac{CH}{\sigma s + \tau} + \frac{C^2 H}{H} \log \left(\frac{1}{\sigma s + \tau} - \frac{CH}{H - \bar{H}} \right) \right\} + C_1,$$

la quale fornisce $s(z)$ per poi dedurre dalla [20]:

$$[22] \quad \bar{s}(z) = \frac{1}{\sigma \left(\frac{\bar{H}}{H} \frac{1}{\sigma s + \tau} + C \right)} - \frac{\tau}{\sigma}.$$

I valori dei parametri H ed \bar{H} possono variarsi a piacere in quanto essi dipendono da $V, \Omega, \Delta R_0$, quantità delle quali possiamo disporre a nostro arbitrio. Essi però dipendono anche da altre grandezze come $G v_0 \sigma \tau$ le quali sono però fissate dalla natura delle sostanze in giuoco.

Le costanti arbitrarie C e C_1 si possono determinare facilmente, quando siano dati $V, \Omega, \Delta R_0$, e si prefissino i valori iniziali di $s(z)$ e di $\bar{s}(z)$ alla bocca inferiore della colonna, e cioè:

$$\bar{s} = 1, \quad s = \eta, \quad \text{per } z = 0.$$

Anzitutto dalla [22] si dedurrà immediatamente la costante C ; la si sostituirà poi nella [21], fattovi $z=0$, e si ricaverà subito C_1 .

Conosciuto C e C_1 , la [21] fornirà direttamente l'altezza $z=h$ che si deve attribuire alla colonna affinché, all'imbocco superiore di questa si ottenga il titolo $s=1$ per il minerale che s'introduce.

Se con questo la colonna riesce troppo alta, ovvero il titolo $s(h)$ del liquido che esce dallo sbocco superiore (titolo che si valuta mediante la [22], fattovi $s=1$) riesce troppo basso, occorrerà modificare uno dei parametri $V, \Omega, \Delta R_0$, oppure ΔS_0 , in quanto ΔS_0 è legato ai precedenti dalla relazione tra volumi:

$$\frac{\Delta S_0}{p_L} = \Omega V - n e \frac{V}{V_0} = \Omega V - \Delta R_0 \frac{V}{V_0},$$

dove \bar{V}_0 è la velocità relativa della breccia rispetto al liquido, valutata alla base superiore della colonna, se la [8] si considerasse nella sua effettiva variabilità.

Dalla bocca superiore esce ancora il volume $\frac{\Delta S_0}{p_L}$ di liquido, ma al titolo $\bar{s}(h)$, quindi il peso sarà:

$$\frac{\Delta S_0}{p_L} \cdot p_{\bar{s}(h)} ,$$

e il peso di materiale utile ricavato per secondo:

$$\frac{\Delta S_0}{p_L} \cdot p_{\bar{s}(h)} \cdot \bar{s}(h) = \frac{\Delta S_0}{p_L} \cdot \frac{\bar{s}(h)}{\sigma \bar{s}(h) + \tau}$$

Roma, 11 Dicembre 1941.