

## SUL GRUPPO DELLE CUSPIDI DELLE CURVE CUSPIDATE DI UNA RETE (\*)

MARIO TOGNETTI

SUMMARY. — Classis  $Q$  cuspidum curvarum cuspidatarum alicuius retis, quae ad lineare systema tripliciter infinitum pertineat, exprimitur per classem (canonicam) punctorum curvae  $H$ , qui locus est cuspidum curvarum cuspidatarum eiusdem systematis, et per classes serierum aequivalentiae variantium et covariantium fundamentalium.

In questa nota mi propongo di esprimere il gruppo  $Q$  delle cuspidi delle curve cuspidate di una rete, appartenente ad un sistema lineare triplamente infinito  $|C|$ , per mezzo di un gruppo (canonico) di punti della curva  $H$ , luogo delle cuspidi delle curve cuspidate di  $|C|$ , e di gruppi delle serie invarianti  $S$  ed  $\Omega$  di  $F$  e delle serie covarianti  $(C, C)$  e  $(C, C')$  di  $|C|$  <sup>(1)</sup>.

Per semplicità suppongo che il sistema  $|C|$ , irriducibile, semplice, non possedente curve fondamentali, sia anche privo di punti base.

1. — Ricordiamo <sup>(2)</sup> le seguenti proprietà del sistema  $|C|$ .

Le jacobiane  $C_j$  di tutte le reti estratte da  $|C|$  costituiscono un sistema lineare triplamente infinito  $|C_j|$ ; il sistema jacobiano  $|C_y|$  di

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Francesco Severi, il 6 giugno 1942.

(1) Per la definizione di queste serie d'equivalenza e per le altre nozioni di cui qui si fa uso, in particolare per la relazione funzionale che traduce la nota formula di Noether che dà il genere di una curva spezzata, che qui si applica, vedere: F. SEVERI, *Serie, sistemi di equivalenza e corrispondenze algebriche*. Lezioni tenute dall'Autore presso il R. Istituto Nazionale di Alta Matematica, raccolte da F. CONFORTO ed E. MARTINELLI. Ed. Cremonese, Roma, 1942-XX.

(2) Vedi, per esempio, M. PANNELLI, *Sui sistemi lineari triplamente infiniti di curve tracciate sopra una superficie algebrica*. Rendiconti del C. Matematico di Palermo. tomo XX, 1905, n. 1 e 2.

$|C_j|$  è il sistema riducibile formato dalla curva fissa  $H$  e dalle curve del sistema  $|C|$ , cioè:

$$|C_H| = |H + C|$$

Sulla superficie  $F$  vi sono  $y$  punti, ciascuno caratterizzato dalla proprietà di essere punto di contatto per le curve della rete di  $|C|$  da esso individuata: i suddetti punti, il cui insieme denoteremo con  $Y$ , sono i punti doppi della involuzione delle coppie neutre di  $F$  rispetto a  $|C|$ ; sicchè, sulla superficie  $F'$  immagine proiettiva di  $|C|$ , essi hanno per immagini i punti cuspidali della linea doppia  $D'$  di  $F'$ .

Inoltre, la curva  $H$  ha un punto doppio in ciascuno dei punti  $Y$  ed appartiene al sistema lineare:

$$|8C + 4K|.$$

2. - La serie canonica virtuale di  $|C_H|$  è data <sup>(1)</sup> da:

$$(C_H, C'_H) \equiv 2\Omega + 9(C_j, C'_j),$$

dove  $\Omega$  rappresenta la serie canonica impura di  $F$ .

D'altra parte, essendo  $|C_H| = |H + C|$ , si ha anche <sup>(2)</sup>

$$(C_H, C'_H) \equiv (H, H') + (C, C') + 2(C, H)$$

dove  $(H, H')$  è un gruppo canonico virtuale di  $H$ ,  $(C, C')$  un gruppo canonico virtuale (=effettivo) di  $C$  e  $(C, H)$  denota il gruppo virtuale delle intersezioni di  $C$  con  $H$ .

Uguagliando le due espressioni di  $(C_H, C'_H)$  si ottiene:

$$2\Omega + 9(C_j, C'_j) \equiv (H, H') + (C, C') + 2(C, H);$$

<sup>(1)</sup> Cfr. F. SEVERI, *op. cit.*, pag. 258.

<sup>(2)</sup> Cfr. F. SEVERI, *op. cit.*, pag. 216.

ma  $(C_j, C'_j)$  è a sua volta equivalente a  $2\Omega + 9(C, C')$  e  $H \equiv 8C + 4K \equiv 4(C + C')$ , perciò:

$$2\Omega + 18\Omega + 81(C, C') \equiv (H, H') + (C, C') + 8(C, C) + 8(C, C').$$

Esprimendo un gruppo canonico virtuale  $(H, H')$  di  $H$  per mezzo di un suo gruppo canonico effettivo  $M(H)$  e dei suoi punti doppi  $Y$  mediante la relazione <sup>(1)</sup>

$$(H, H') \equiv M(H) + 2Y$$

e sostituendo si ha:

$$[1] \quad 20\Omega + 72(C, C') \equiv M(H) + 2Y + 8(C, C).$$

Ora il gruppo  $Y$  dei punti cuspidali di  $D'$  può esprimersi per mezzo delle serie invarianti  $S$  ed  $\Omega$  di  $F$  e delle serie covarianti  $(C, C)$  e  $(C, C')$  di  $|C|$  con la relazione <sup>(2)</sup>

$$Y \equiv \Omega - S + 2(C, C) + 4(C, C').$$

Mediante sostituzione nella [1] si deduce:

$$18\Omega + 2'S \equiv M(H) + 12(C, C) - 64(C, C')$$

e da questa, tenendo conto che <sup>(3)</sup>

$$2(S + \Omega) \equiv Q - 12(C, C')$$

si ricava infine l'espressione cercata di  $Q$ :

$$[2] \quad Q \equiv M(H) + 12(C, C) - 52(C, C') - 16\Omega.$$

La [2] può anche scriversi:

$$2(S + \Omega) \equiv M(H) + 12(C, C') - 64(C, C') - 16\Omega$$

e fornisce un'altra espressione della serie invariante assoluta  $2(S + \Omega)$ .

<sup>(1)</sup> Cfr. F. SEVERI, *op. cit.*, pag. 229.

<sup>(2)</sup> Cfr. F. SEVERI, *op. cit.*, pag. 270.

<sup>(3)</sup> Cfr. F. SEVERI, *op. cit.*, pag. 260.